

INDIRECT SOUND TRANSMISSION WITH JOIST AND SOLID FLOORS

by H. J. PURKIS and P. H. PARKIN

Building Research Station, Watford, England

Summary

Field values of airborne sound insulation of floating joist floors are considerably lower than laboratory values. To investigate this difference the indirect transmission past such a floor with an average airborne insulation of 43 db has been measured in the field by a method previously described. The transmission past a similarly situated floating concrete floor, insulation 49 db, has also been measured for comparison. In both cases the value of airborne insulation was found to be determined mainly by flanking transmission and it appears that the higher insulation of the concrete floor in the same structure is due to the junction of the floor with the walls attenuating the flanking energy. There is little indirect insulation with the joist floor since it connects with the walls at very few places.

Sommaire

Les mesures effectuées sur des planchers flottants à poutrelles donnent des valeurs nettement plus basses que celles obtenues en laboratoire. Dans le but d'essayer d'expliquer cette différence, on a mesuré la transmission indirecte obtenue avec un plancher dont l'isolation sonore contre les sons aériens était de 43 db. La méthode employée pour ces mesures a été décrite ailleurs. Les résultats furent comparés avec ceux obtenus pour un plancher flottant en béton massif avec une isolation sonore de 49 db. On a constaté dans les deux cas que la valeur de l'isolation sonore contre les sons aériens était déterminée en grande partie par la transmission latérale. Les valeurs plus élevées obtenues pour le plancher en béton massif dans une même construction semblent être dues au fait que la jonction du plancher aux parois atténue l'intensité de la transmission latérale. Le plancher à poutrelles n'a que peu d'isolation indirecte puisqu'il ne rejoint les parois qu'en certains points.

Zusammenfassung

Messungen der Luftschalldämmung durch schwimmende Fußböden auf Balkendecken ergeben in ausgeführten Bauten wesentlich niedrigere Werte als bei Laboratoriumsversuchen. Um diesen Unterschied aufzuklären, wurde an einer ausgeführten Decke, deren durchschnittliche Luftschalldämmung 43 db betrug, die indirekte Übertragung durch Nebenschlüsse untersucht. Die angewandte Methode wurde bereits früher beschrieben. Zum Vergleich wurde die seitliche Übertragung neben einem ähnlich gelegenen schwimmenden Fußboden auf einer Betondecke mit einer Dämmung von 49 db untersucht. In beiden Fällen ergab sich, daß die Luftschalldämmung hauptsächlich von den seitlichen Nebenschlüssen abhängt. Die höhere Dämmung der Betondecke unter sonst gleichen Verhältnissen ist der Verbindung zwischen Decke und Wand zuzuschreiben, die die Stärke des seitlich vorbeigeleiteten Schalles herabsetzt. Eine Balkendecke, die nur an wenigen Stellen mit den Wänden in Verbindung steht, besitzt diese indirekte Schalldämmung nur in bescheidenem Maße.

1. Introduction

The airborne sound reduction factor in decibels of a partition is defined as

$$R = 10 \log N_1/N_2 \quad (1)$$

where N_1 is the energy incident on one side of the partition and N_2 the energy emitted from the other side. When measured in the laboratory, R is given by

$$R = 20 \log p_1/p_2 + 10 \log S/A \quad (2)$$

where p_1 and p_2 are the sound pressure levels in the source and receiving room respectively, S is the area of the partition under test and A the total absorption in the receiving room. Under laboratory conditions the energy transmitted by indirect paths, i. e. other than through the partition, should be negligible.

When the sound insulation of a partition is measured in the field, however, some energy will travel to the receiving room via the flanking walls. There has previously been some evidence [1] that the magnitude of this indirect transmission did not become appreciable until the average insulation of the partition reached about 50 db. In fact, if the laboratory and field measurements of similar constructions are compared it is found that the differences are usually small (compare ASTON [2], [3] and PARKIN [4]). There are, however, considerable differences between the laboratory and field results in the case of joist floors with floating rafts, as shown in Table I. (For both sets of results the frequency range of 200 to 2000 c/s has been used as the laboratory results were only available for this range. The correction factor is in both cases $10 \log S/A$ to facilitate comparison.)

Table I

| Type of floor | Measured insulation [db] | |
|---|--------------------------|-------|
| | Laboratory | Field |
| (1) Plain wood joist. Floorboards nailed to joists. Plasterboard ceiling. | 34 | 33 |
| (2) As (1) but with 50 kg/m ² of sand on plasterboard between joists. | 42 | 42 |
| (3) As (1) but raft of floorboards secured to battens floating on glass silk quilt over the joists. | 48 | 41 |
| (4) As (3) but with 50 kg/m ² of sand on plasterboard between joists. | 57 | 44 |

It is seen that the difference between the two sets of values is significant as soon as the floorboards are separated from the joists by a resilient quilt and is most marked when pugging is included to increase the weight of the floor.

The discrepancies may be due in part to the difference in size between the laboratory specimen floors and the actual floors (about 4.5 m² in the laboratory compared with about 14 m² in the field). This may affect the total stiffness of the floor and hence the insulation, but such an effect is unlikely to account for the whole of such a large difference. In any case such discrepancies are not found for other types of partition. The only other reason for the discrepancies could be the effect of the indirect transmission on the field results. This paper describes the measurement of indirect transmission past a pugged, floating joist floor and, for comparison, similar measurements on a concrete floor.

2. Method

The measurements were made in the first block of the Building Research Station's experimental flats at Abbots Langley. This block was divided into two sections, one had floating joist floors and the other floating concrete floors. The load-bearing walls were of 28 cm cavity brick, i. e. the floors were carried by the inner leaf of brick, 11 cm thick. A layer of bitumenised felt was included in all walls at floor level. The joist floor measured was of the fourth type given in Table I and the details of its construction are shown in Fig. 1. It should be noted that

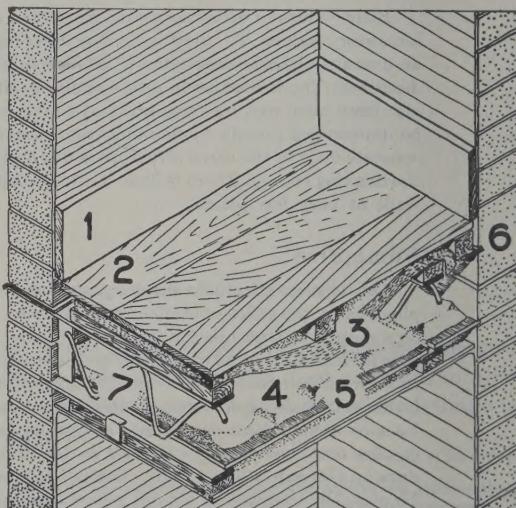


Fig. 1. Axonometric projection of part of joist floor;

- (1) Skirting-board attached to wall but free from floor,
- (2) Floating wooden raft,
- (3) Glass silk quilt,
- (4) Sand pugging,
- (5) Pugging boards,
- (6) Bitumenised felt membrane,
- (7) Open-web steel joists.

open web steel, not wooden, joists were used in this floor, but it makes practically no difference to the results obtained and the same discrepancy between field and laboratory results occurs for this type as for wood joist floors. The floating concrete floor, on which measurements were also made, was in a room identical to that containing the joist floor and symmetrically placed in relation to the block so that all external factors were the same in both cases. The main floor, 15 cm thick, extended over the whole of a flat and in each room the floating screed, which was 4 cm thick, rested on a quilt of glass wool turned up at the edges to isolate it from the walls.

A detailed description of the method for measuring indirect transmission has been given previously [5]. Briefly, in the first stage of the method warble tones from loud-speakers are emitted in the source room. The normal vibration amplitude of all receiving room surfaces below are measured with a vibration pick-up. One measuring point to each square metre of surface approximately is used. Structure-borne sound exciters on the source room walls and floor are then used to replace at discrete points the energy previously obtained over the whole surface from the airborne sound field. These exciters are adjusted in position and number, and in the energy fed to each, until the vibration amplitudes in the receiving room are as nearly as possible the same as with airborne excitation. For stage 2 of the measurements the exciters on the source room floor are removed and each of the remaining ones fed with the same energy as in stage 1. This cuts out the direct component of transmission together with any indirect component that might be present in the receiving room walls due to the floor vibrations; the surface amplitudes in the receiving room are again measured. In stage 3 the receiving room ceiling amplitudes are kept at the lower level obtained in stage 2 while those of the remaining surfaces are raised, if necessary by additional exciters, to the levels obtaining in the first stage.

The sound pressure levels measured at each stage in the receiving room are then used to calculate the amount of indirect transmission. In the normal measurement of airborne sound insulation the field value of the reduction factor, R' , calculated by eq. (2) depends both on the directly and indirectly transmitted sound. If the latter were not present R' would be increased to a value $R' + \Delta R$, due to the direct sound alone, which would correspond more closely to the figure obtained in the laboratory. It is this quantity ΔR that is calculated from the sound pressure levels measured in the present method.

Measurements were made at the three octaves centred at 300, 600 and 1200 c/s giving a total frequency range from 200 to 1600 c/s. The top and bottom octaves of the international frequency band for sound insulation were not covered because the frequency response curve of the vibration pick-up had a large peak in the upper octave and because at low frequencies the exciters used would not give high enough wall amplitudes.

3. Results

The graphs of airborne sound insulation as measured by the provisional international method are

given for both the joist and concrete floors in Fig. 2. The average values for the frequency range 100–3200 c/s are 43 and 49 db respectively.

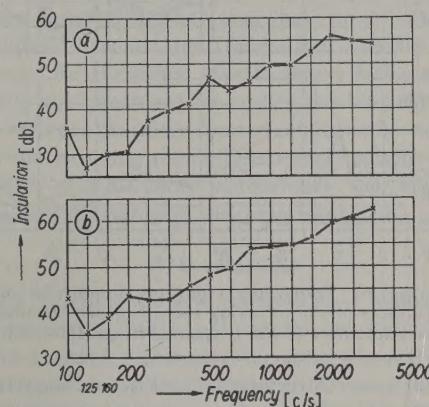


Fig. 2. (a) Airborne sound insulation of joist floor; average (100–3200 c/s) 43 db.
(b) Airborne sound insulation of concrete floor; average (100–3200 c/s) 49 db.

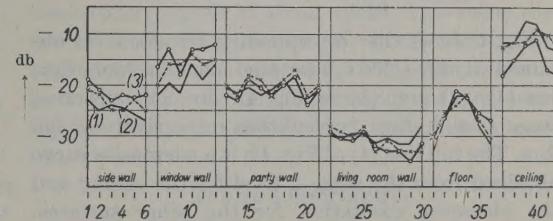


Fig. 3. Transverse vibration amplitudes of all surfaces of the receiving room beneath the floating joist floor in the frequency range 400–800 c/s;
(1) — Airborne excitation,
(2) x---x Structure-borne excitation, stage 1,
(3) o---o Structure-borne excitation, stage 2
(0 db = 1 m s⁻²).

Curve (1) of Fig. 3 shows the wall amplitudes measured in the receiving room beneath the joist floor when the source room was excited with airborne sound at 600 ± 200 c/s. Reproduction of this pattern with structure-borne excitation in stage 1 gave curve (2) and removal of the exciters from the floor in stage 2 caused the levels to be those shown by curve (3). Apart from the ceiling, these levels were essentially the same as for stage 1 which made it unnecessary to go on to the third stage at this frequency. Table II gives the sound pressure levels appropriate to these curves measured in the receiving room, and also the calculated values of ΔR and the amounts of sound energy transmitted indirectly.

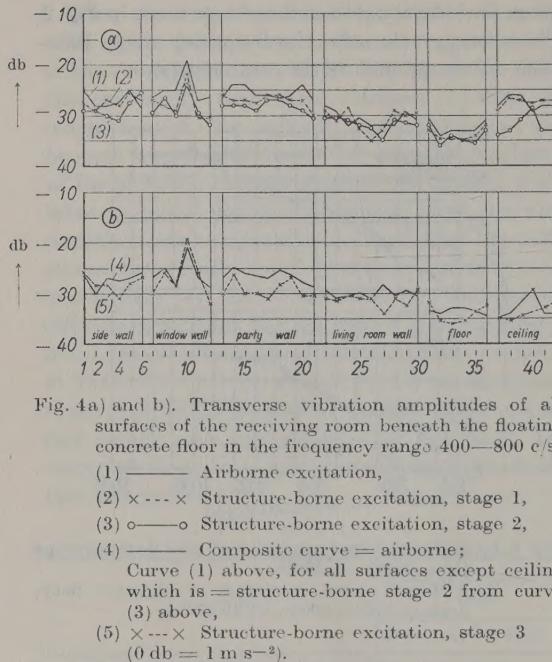


Fig. 4 shows the corresponding set of curves obtained at 600 ± 200 c/s for the concrete floor. Curves (1), (2) and (3) in Fig. 4a are for: airborne, stage 1, and stage 2 excitation respectively as before. The full line (4) of Fig. 4b is a composite curve obtained from the stage 2 level for the ceiling and the air-borne excitation for the other surfaces. Curve (5) is the best reproduction of these values by stage 3 of the method. The measured sound pressure levels and values of ΔR calculated from them are again given in Table II. This table is completed by the results of measurements on both floors at other frequencies, 300 ± 100 , and 1200 ± 400 c/s.

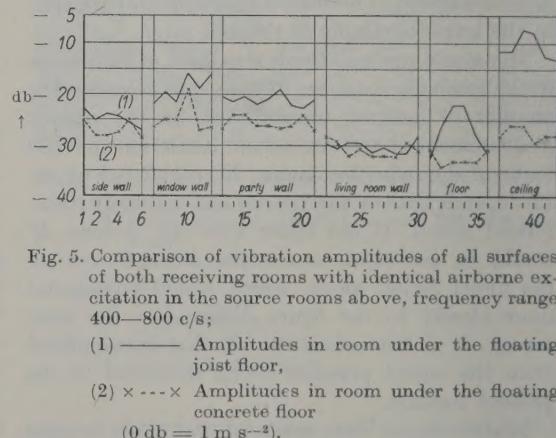
Table II

| Frequency [c/s] | Sound pressure levels [db above $2 \cdot 10^{-4}$ dyne/cm ²] | | | | ΔR [db] | Sound energy trans- mitted indirectly [%] |
|--------------------|---|---------|---------|---------|--------------------|--|
| | Airborne excitation | Stage 1 | Stage 2 | Stage 3 | | |
| Joist floor | | | | | | |
| 300 ± 100 | 52.0 | 50.0 | 46.0 | 47.0 | 1.5 | 30 |
| 600 ± 200 | 50.5 | 50.5 | 48.0 | 48.0 | 3.5 | 55 |
| 1200 ± 400 | 43.5 | 42.5 | 36.5 | 42.5 | 6.0 | 75 |
| Concrete floor | | | | | | |
| 300 ± 100 | 46.5 | 46.5 | 39.5 | 45.5 | 6.5 | 80 |
| 600 ± 200 | 48.5 | 47.5 | 43.0 | 46.5 | 4.0 | 60 |
| 1200 ± 400 | 41.5 | 41.0 | 38.0 | 40.0 | 5.5 | 70 |

Note: Sound pressure levels for different frequencies on the same floor are not comparative since different excitation levels were used.

4. Discussion

The accuracy of the method (± 1.5 db in the alignment of individual vibration levels) is such that only the order of magnitude of the above results can be considered significant. Nevertheless, the figures show that for the joist floor at mid-frequencies the direct and indirect sound are about equal while the former is the controlling influence at low frequencies and the latter is at high frequencies. In the case of the concrete floor the indirect is at all frequencies of greater importance than the direct sound. Although the percentage of indirect sound is even greater in this instance than with the joist floor the absolute value is much less as is obvious from the difference in airborne insulation of the two floors. This fact is shown clearly in Fig. 5 where the vibration amplitudes of the two receiving rooms under identical conditions of airborne excitation above are compared. It is seen that the wall amplitudes beneath the concrete floor are nearly everywhere less than those beneath the joist floor. Thus the sound radiated from the walls in one room is less than that in the other but this conclusion does not necessarily hold also for the floor and ceiling for it is here that the rooms differ in construction.



The figures of 55 per cent. and 60 per cent. of sound transmitted indirectly at 600 c/s past the joist and concrete floors respectively show that the overall insulation between the two rooms would be increased by less than 3 db if there were no direct sound component. Thus with joist floors carried on 11 cm brick walls there would appear to be a limiting insulation of about 46 db obtainable at 600 c/s between adjacent rooms and correspondingly a limit of about 53 db with concrete floors on similar walls. Obviously an increase in the insulation of the floor

itself, to cut out this direct sound, will affect the junction of the floor and walls, and may tend to reduce the indirect sound also, particularly that component travelling from the floor into the receiving room walls. It is unlikely that the limiting value of 46 db would be appreciably increased by this means. If the load bearing walls were solid, say 23 cm thick, instead of 28 cm cavity construction they would not be so easily set into vibration, hence would transmit less indirect sound (although being thicker they would be better radiators). In most practical building construction however only two, and possibly only one of the walls would be of 23 cm brickwork, the remaining partition walls being thinner. Hence the limiting figures quoted are probably of the right order of magnitude for load bearing brick constructions.

All the components of indirect transmission travelling from source room to receiving room must pass the junction of the walls with the floor so it is significant to see how this junction differs in the two cases. From Fig. 1 it can be seen that the joist floor has practically no connection with the two side walls and only connects with the other walls at discrete points where the joists enter them. Thus the vertical continuity of these walls is only broken at these points which constitute a small fraction of the total perimeter. (The thin layer of bitumenised felt in the walls does form a barrier, but its effect is thought to be small and is certainly the same for both cases.) With the concrete floor, however, the main 15 cm floor extending over the whole area of the flat makes a definite junction with all four flanking walls at floor level extending over the whole perimeter.

Consider what happens when structure-borne sound energy travels down from the upper room by the flanking walls. There is practically no attenuation when it passes the joist floor because there is no discontinuity, hence it causes high vibration amplitudes in the receiving room walls below, with correspondingly high sound radiation from them. In the other case the connection with the concrete slab at floor level causes part of the energy to be reflected back into the source room walls and part to be transmitted past the junction. Some of this transmitted energy goes down into the receiving room walls and the rest spreads sideways into the main floor slab. CREMER [6] has shown that when energy in a wall reaches a cross junction with a simi-

lar wall, five-eighths of it is reflected and the other three-eighths divided equally between the three transmitted paths. This type of junction occurs for two of the walls, while with the other two the floors form a T junction. Assuming that the order of magnitude of reflected and transmitted energies is the same as for the other type it seems that approximately one-quarter of the energy reaching the junction arrives at surfaces from which it can be radiated into the receiving room. This corresponds to an insulation of 6 db which agrees very well with the measured difference in airborne insulation.

5. Conclusions

The junction which a concrete floor makes with the supporting walls reduces the transmission of indirect sound, although more energy is still transmitted indirectly than directly. No such junction exists in the case of joist floors and, although the percentage of sound transmitted indirectly is less than with concrete floors, the absolute value is considerably greater. The net result is that a limit is set to the insulation of joist floors in load bearing brick constructions of about 46 db. This value can not be increased unless an effective sound insulating membrane can be used in the flanking walls at floor level. The obvious requirement for structural rigidity makes it unlikely that such a membrane can be devised.

Acknowledgment

This work has been carried out as part of the programme of the Building Research Board of the Department of Scientific and Industrial Research, and is published by permission of the Director of Building Research.

(Received 2nd December, 1951.)

References

- [1] CONSTABLE, J. E. R., Proc. phys. Soc., London **50** [1938], 368 and **51** [1939], 53.
- [2] ASTON, G. H., Report of the 1948 Summer Symposium of the Acoustics Group, Phys. Soc. [1949], 7.
- [3] ASTON, G. H., see [2], 48.
- [4] PARKIN, P. H. and HUMPREYS, H. R., J. roy. Inst. Brit. Archit. (10) **57** [1950], 392.
- [5] MEYER, E., PARKIN, P. H., OBERST, H. and PURKIS, H. J., Acustica **1** [1951], 17.
- [6] CREMER, L., "Propagation of structure-borne sound". Department of Scientific and Industrial Research, Sponsored Research (Germany), Report No. 1 (Series B); Her Majesty's Stationery Office, 1952.

MESURE DES INTERVALLES HARMONIQUES DE LA GAMME À PARTIR DE LA SENSATION SUBJECTIVE DE CONSONANCE

par MEHDI BARKECHLI*

Université de Téhéran

Sommaire

En vue d'établir une relation objective entre la gamme musicale et les caractéristiques physiques des sons, l'auteur a repris, sur les intervalles harmoniques, les travaux antérieurs qui n'avaient porté que sur la mesure des intervalles mélodiques.

Les résultats de cette étude sont les suivants:

La sensibilité de l'oreille est très supérieure à ce qu'on aurait pu croire a priori;

La quarte paraît plus «précise» que la quinte et l'octave;

L'ensemble des intervalles harmoniques appartient à la gamme naturelle;

Un intervalle pris dans les domaines des sons graves (au dessous de 400 c/s) apparaît moins «précis» que s'il est pris dans la quinte plus aiguë.

Ces expériences, où la personne de l'exécutant joue évidemment un certain rôle, confirment dans l'ensemble les résultats de recherches antérieures relatifs à l'existence de deux gammes: l'une mélodique concordant avec celle de PYTHAGORE et l'autre harmonique correspondant à la gamme d'ARISTOXÈNE.

Zusammenfassung

Mit dem Ziel der Aufstellung einer objektiven Beziehung zwischen der musikalischen Tonleiter und den Gesetzmäßigkeiten der Akustik hat der Verfasser die früheren Arbeiten über die harmonischen Intervalle wieder aufgenommen, die bisher nur die Ausmessung von melodischen Intervallen geliefert hatten.

Die Ergebnisse lassen sich in den folgenden Punkten zusammenfassen:

Die Empfindlichkeit des Ohres ist weitaus größer, als man das von vornherein erwarten würde.

Die Quarte erscheint „präziser“ als die Quinte und die Oktave.

Die Gesamtheit der harmonischen Intervalle weist eine Verwandtschaft auf zur natürlichen Tonleiter.

Ein Intervall im Bereich der tiefen Töne (unterhalb 400 Hz) erscheint weniger „präzise“ als in höheren Lagen.

Diese Versuche, bei denen die Versuchspersonen offenbar eine gewisse Rolle spielten, bekräftigen in ihrer Gesamtheit die früheren Versuchsergebnisse, die die Existenz von zwei Tonleitern vermuten lassen: einer melodischen, die mit der pythagoreischen übereinstimmt, und einer harmonischen, die der von ARISTOXENUS entspricht.

Summary

In order to establish a relationship between the musical scale and the physical characteristics of sounds, the author resumes, in relation to the harmonic intervals, previous work which was only concerned with the measurement of melodic intervals. His conclusions are:

The ear has an actual sensitivity much greater than one would deduce a priori.

The fourth sounds more "precise" than the fifth or octave.

The assembly of harmonic intervals forms part of the natural scale.

An interval chosen from among the lower tones (below 400 c/s) seems less "precise" than one taken from the fifth above.

These experiments, in which the personal equation of the player has a certain part, confirm in general the results of earlier researches, viz., that there are really two scales; one the melodic scale of PYTHAGORAS, the other the harmonic one of ARISTOXENES.

Table des Matières

1. Introduction
2. Travaux antérieurs

3. Expériences préliminaires
4. Position du problème
5. Méthode de mesure et appareillage
6. Dépouillement des résultats
 Erreurs
7. Résultats
 Conclusion

* Travail fait au CENTRE DE RECHERCHES SCIENTIFIQUES, INDUSTRIELLES ET MARITIMES - 66, rue St-Sébastien, Marseille.

1. Introduction

Le problème s'est souvent posé d'établir une relation objective entre les gammes musicales et les caractéristiques physiques des sons qui les constituent. Il est bien connu, que la notion de hauteur subjective, ne coïncide pas rigoureusement avec celle du logarithme de la fréquence, comme on l'admet en première approximation. Les travaux de SNOW [1], STEVENS, VOLKMANN et NEWMAN [2] ont montré que la hauteur dépendait en particulier de l'intensité, du timbre et de la fréquence elle-même: un même intervalle paraissant plus grand pour les fréquences aiguës que pour les fréquences graves. D'autres auteurs ont cherché à aborder le problème, d'un point de vue plus rapproché de la musique et de nombreuses études ont cherché à vérifier s'il y avait parmi les différents systèmes de gammes proposées au cours des siècles, un système qui correspondait plus étroitement que les autres aux intervalles mélodiques et harmoniques «naturellement» utilisés. — L'objet de la présente étude est de fournir les premiers résultats relatifs à une mesure directe et objective des rapports des fréquences des notes de la gamme présentant les consonances principales subjectives.

2. Travaux antérieurs

HELMHOLTZ [3] fut le premier à trouver une justification physiologique à l'existence des nombres entiers comme base des intervalles de la gamme.

Pour donner une vérification expérimentale de ces idées, CORNU et MERCADIER [4] effectuèrent des relevés à l'aide d'un dispositif mécanique d'enregistrement des vibrations sonores, sur un cylindre enfumé (phonautographe). Ils ont discerné deux types de gammes, l'une mélodique coïncidant avec celle de PYTHAGORE et l'autre harmonique déterminée par l'extinction de «battements d'ordre supérieur» entre les deux sons composants.

Cependant, les exécutants ne se basent pas forcément sur l'extinction de ces battements d'ordre supérieur pour apprécier la consonance et, d'autre part, l'appareillage expérimental utilisé par CORNU et MERCADIER, bien qu'ils l'eussent perfectionné dans la suite de leurs essais [5], ne leur permettait pas de mesurer avec la précision nécessaire, les fréquences composantes des deux notes sonnant simultanément: après avoir réalisé l'accord, l'exécutant reprenait pour la mesure, les deux notes séparément, ce qui introduisait un intervalle mélodique.

La technique ayant fait d'énormes progrès depuis le développement de l'électroacoustique, la question a été reprise dans ces dernières années.

SMALL [6] et GREENE [7], étudiant les intervalles mélodiques par des procédés électriques, sont arrivés à la même conclusion que CORNU et MERCADIER.

Le problème des intervalles harmoniques, techniquement plus difficiles, restait entier.

VAN ESBROECK et MONFORT [8] ont poussé ces études sur un orgue électrique expérimental et «orthoclawier» que le premier a réalisé et dans lequel l'octave était précisément divisée en 53 commas. Ils ont fait jouer des virtuoses sur cet instrument, selon les différentes gammes réalisables grâce à la division en neuf commas de chaque ton (Tableau I) et fait voter ensuite un grand nombre d'auditeurs sur la valeur esthétique relative des différents systèmes pratiqués mélodiquement et harmoniquement. D'un dépouillement statistique des résultats il semble que l'on puisse déduire, d'après ces auteurs, que la gamme de PYTHAGORE serait la plus «naturelle», tant au point de vue mélodique qu'harmonique.

Indépendamment des résultats de VAN ESBROECK et MONFORT, l'auteur a abordé le problème de la gamme d'un point de vue différent [9]: dans le but d'établir des relations entre la gamme persane, base de la musique orientale [10], et les gammes européennes, nous avons mesuré les intervalles de cette gamme en enregistrant des oscillogrammes des mélo-

Tableau I

Tableau comparatif des gammes. Intervalles successifs avec les unités: comma, savart et cents.

1 comma = 23,458 ≈ 23 cents,

1 savart = 3,986 ≈ 4 cents.

| | | do | ré | mi | fa | sol | la | si | do |
|--------------------|-------------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| Gamme tempérée | Rapports des fréquences | $2^{\frac{1}{6}}$ | $2^{\frac{1}{6}}$ | $2^{\frac{1}{2}}$ | $2^{\frac{1}{6}}$ | $2^{\frac{1}{6}}$ | $2^{\frac{1}{6}}$ | $2^{\frac{1}{2}}$ | $2^{\frac{1}{6}}$ |
| | commas | 8,8 | 8,8 | 4,4 | 8,8 | 8,8 | 8,8 | 4,4 | |
| | savarts | 50 | 50 | 25 | 50 | 50 | 50 | 25 | |
| | cents | 200 | 200 | 100 | 200 | 200 | 200 | 100 | |
| | | | | | | | | | |
| Gamme de PYTHAGORE | Rapports des fréquences | 9 | 9 | 256 | 9 | 9 | 9 | 256 | |
| | | 8 | 8 | 243 | 8 | 8 | 8 | 243 | |
| | commas | 9 | 9 | 4 | 9 | 9 | 9 | 4 | |
| | savarts | 51 | 51 | 23 | 51 | 51 | 51 | 23 | |
| | cents | 204 | 204 | 90 | 204 | 204 | 204 | 90 | |
| Gamme d'ARISTOTÉLE | Rapports des fréquences | 9 | 10 | 16 | 9 | 10 | 9 | 16 | |
| | | 8 | 9 | 15 | 8 | 9 | 8 | 15 | |
| | commas | 9 | 8 | 5 | 9 | 8 | 9 | 5 | |
| | savarts | 51 | 46 | 28 | 51 | 46 | 51 | 28 | |
| | cents | 204 | 184 | 112 | 204 | 182 | 204 | 112 | |

dies chantées par un grand nombre de sujets. Le dépouillement statistique des fréquences relevées sur ces oscillogrammes, a montré:

1. La concordance parfaite dans un tétracorde de la gamme iranienne et de la gamme de PYTHAGORE en ce qui concerne les intervalles mélodiques principaux (do, ré, mi, fa).

2. Les intervalles mélodiques secondaires que certains musicologues avaient qualifiés de tiers et de quarts de ton, représentent un système de deux subdivisions distinctes d'un ton dont le schéma est donné en Fig. 1, entrant toutes deux dans le système de PYTHAGORE: *L.L.C* et *L.C.L*¹.

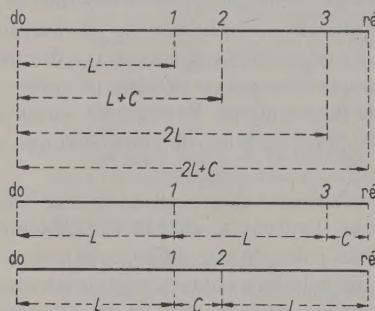


Fig. 1. Divers intervalles dans la gamme iranienne, contenues dans un ton majeur (9/8).

Nous nous sommes proposés de reprendre la question du point de vue de CORNU et MERCADIER, mais en évitant les inconvénients signalés, grâce à l'emploi d'un appareillage moderne, et en nous basant essentiellement sur la consonance subjective.

3. Expériences préliminaires

Nous avons fait diverses expériences pour condenser les résultats, souvent assez discordants, donnés par différents auteurs et avoir une idée de la sensibilité de l'oreille dans l'appréciation des accords. La plupart de ces essais ont été effectués en chambre «sans écho» (pour éviter l'influence des ondes stationnaires) et en «écoute biauriculaire».

Les expériences faites avec des oscillateurs ont montré qu'on devait distinguer dans l'appréciation des accords, entre une oreille acoustiquement sensible et une oreille musicale.

Pour l'accord parfait (l'unisson) — obligatoirement mélodique si on veut éviter les battements — on peut avec des sources sinusoïdales discerner

¹ Par les lettres *L* et *C* nous entendons le limma et le comma pythagoricien, soit:

$\frac{256}{243} \approx 23\sigma$ ou 90 cents et $\frac{525061}{524288} \approx 5\sigma$ ou 20 cents.

deux seuils différentiels: le premier correspondant à la perception d'un désaccord, va de 0,5 pour 1000 à 2 pour 1000 selon la finesse de l'oreille du sujet; le second correspondant à la distinction entre le son plus aigu et le son plus grave, qui seule intéresse le musicien est déjà plus élevé, 1 à 2 pour 1000.

Pour les autres accords, les erreurs deviennent beaucoup plus grandes. L'octave est apprécié avec un écart de 3 à 6 pour 1000, et la quinte et la quarte de 5 à 50 pour 1000 selon l'éducation musicale de l'auditeur. Pour les accords plus complexes, les écarts tolérés par l'oreille croissent très rapidement et, à partir de la tierce, un auditeur non musicien, même entraîné, confond les accords voisins les uns des autres.

Cependant un entraînement à l'audition des sons sinusoïdaux, rarement rencontrés dans la pratique, permet de réduire appréciablement ces écarts.

Les expériences effectuées avec les instruments de musique, très riches en harmoniques, donnent des résultats très différents, comme l'ont fait remarquer de nombreux auteurs: c'est là l'origine des discordances entre les résultats fournis par les anciens expérimentateurs qui opéraient soit avec les cordes, soit avec des diapasons, et ceux obtenus par les physiciens qui ont repris ces expériences dans les vingt dernières années, comme SHOWER, BIDULPH [11], STEVENS et DAVIS [12].

Avec les cordes tendues du type sonomètre, nous avons repris quelques uns des essais effectués à l'aide d'oscillateurs et nous avons obtenu des écarts beaucoup plus faibles. L'écart tolérable pour reconnaître un type d'accord restant pourtant assez large, sauf pour des sujets exceptionnels. Ainsi l'octave est appréciée avec une tolérance de 1 pour 1000, la quinte et la quarte 1,5 pour 1000 et la tierce avec 2 pour 1000.

Dans tout le cours de ces expériences on a opéré dans la gamme médium s'étendant de 400 à 2000 c/s, où la sensibilité différentielle de l'oreille est à peu près constante et à des niveaux sonores de 45 à 55 db environ, pour lesquels la sensibilité auditive est maxima.

4. Position du problème

De nombreuses raisons nous ont conduit à penser qu'une justification de la valeur objective de tel ou tel système de division de l'octave devait se trouver dans l'étude de la consonance subjective des intervalles harmoniques «notes jouées ensemble». On peut citer, par exemple, le fait que de toute antiquité les exécutants font l'emploi des diverses consonances pour accorder leur instrument, même dans une musique monodique comme celle de l'orient,

ce qui fait apparaître la consonance comme la base même de la gamme musicale.

Les expériences sur la différentiation de la gamme mélodique et de la gamme harmonique, sont de deux types:

1. Le sujet est un musicien qui joue des mélodies ou des accords qu'il rend satisfaisants pour lui sur son instrument; un appareil de mesure objective détermine d'autre part les fréquences correspondantes.

2. On répète un même morceau en utilisant successivement les différentes gammes (Pythagore, Aristoxène, tempérée) et on demande aux auditeurs d'indiquer leur préférence.

On fait appel dans les deux cas, à deux facultés différentes inégalement réparties selon les individus. Dans le premier cas, c'est la capacité (d'un violoniste par exemple) de réaliser successivement ou conjointement des intervalles donnés par des tâtonnements dont on est maître (variation de la position du doigt sur la corde). Dans le second cas, c'est la capacité de discerner en bloc des phénomènes très subtils que l'on appelle la justesse d'un accord, faute de pouvoir en dire plus. Ces deux capacités sont très inégalement réparties chez les individus, et, si la première est nécessaire à la pratique d'un instrument de musique à sons non fixes, la seconde n'est reliée ni à la sensibilité acoustique proprement dite, ni aux capacités esthétiques du sujet.

Etant donnée la délicatesse des phénomènes en jeu, l'appréciation des auditeurs ne peut être prise comme base dans la mesure objective des intervalles. C'est le travail de musiciens de talent et bien entraînés dans ce genre d'expériences, fournissant sur leur propre instrument les intervalles mélodiques et harmoniques soigneusement réalisés, dont l'expérimentateur mesure la valeur objective.

5. Méthode de mesure et appareillage

Le problème de la mesure des rapports des fréquences dans l'intervalle harmonique revient à séparer les deux sons composants joués simultanément. On ne peut donc avoir recours à un microphone qui ne capterait que la résultante des deux sons, donnant un oscillogramme pratiquement impossible à dérouiller vu la complexité considérable des sons musicaux usuels, et d'autre part, comme on peut en constater la raison (voir ci-dessus 3), de nombreux auteurs ont démontré l'impossibilité d'utiliser des sons purs sinusoïdaux pour les études d'acoustique musicale, le timbre jouant un rôle essentiel dans la reconnaissance des intervalles.

Nous avons donc mis au point un dispositif électrostatique permettant de capter séparément sur un violon les vibrations de chacune des cordes ex-

citées simultanément par l'archet. La Fig. 2 donne le schéma du principe du dispositif: une mince lame métallique formant l'électrode était placée sous chaque corde et collée sur la touche du violon.

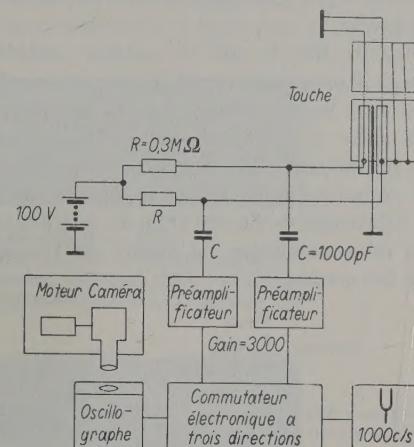


Fig. 2. Schéma de l'appareillage utilisé pour la mesure des intervalles harmoniques produits sur un violon en jouant des doubles cordes.

Les cordes métalliques ou filées étaient reliées à la masse et les électrodes portées à un potentiel positif de 100 V environ à l'aide d'une pile. On construisait ainsi une sorte de microphone électrostatique et les déplacements de la corde provoquaient des variations périodiques de capacité, se traduisant par un écoulement de charge $dq/q = dC/C$ à travers une résistance R intercalée dans le circuit de la pile. Les tensions alternatives recueillies étaient transmises à l'aide de faibles capacités à la grille de deux préamplificateurs attaquant un commutateur électrique à trois directions et un oscilloscopie. On obtenait ainsi sur l'écran de celui-ci les vibrations des deux cordes correspondant aux deux sons composant l'accord, et on injectait sur la troisième trace une force électromotrice à 1000 c/s issue d'un diapason entretenu restant constant à 10^{-8} près et permettant de mesurer, s'il en est besoin, la hauteur absolue des sons.

La capacité d'une corde isolée tendue à quelque distance d'une plaque métallique, étant:

$$C = \frac{K\epsilon l}{\ln(4x/d)}$$

un accroissement de la distance correspond à une variation de capacité de C à $C + dC$, telle que:

$$C + dC = \frac{K\epsilon l}{\ln \frac{4(x+dx)}{d}} = C \left(1 - \frac{4dx}{x} \right)$$

La longueur d'une électrode fixe ne pouvant guère dépasser 5 cm pour ne pas gêner le jeu des doigts de l'exécutant sur la touche, le système était donc peu sensible et requérait une grande amplification de l'ordre de 3000, la tension produite ne dépassait guère 0,5 mV.

La capacité formée par le système corde-électrode variait comme l'inverse du logarithme de la distance entre les deux armatures. La différence de capacité entre une même corde et les électrodes voisines juxtaposées n'était pas très grande et l'on pouvait craindre une influence de chacune des cordes sur l'électrode de l'autre (Fig. 3), se traduisant par une intermodulation de nature électrique de chacune des cordes.



Fig. 3. Influence électrostatique de chacune des cordes sur l'électrode de l'autre.

Pour obvier à cet inconvénient, nous avons été conduit à modifier la répartition des lignes de force du champ électrostatique à l'aide d'une électrode auxiliaire reliée à la masse et placée entre les deux lamelles, comme l'indique la Fig. 4.

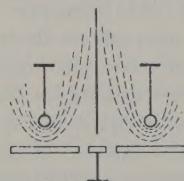


Fig. 4. Elimination de l'intermodulation de nature électrique des cordes.

Pour les enregistrements, une caméra à déroulement continu, à vitesse voisine de 1 m/s, utilisant du film de 35 mm, était placée devant l'écran de l'oscillographie dont le balayage était supprimé (Fig. 2).

Les Fig. 5 et 6 donnent les photographies de l'appareillage utilisé.

6. Dépouillement des résultats

La vitesse du déroulement de la caméra d'enregistrement étant loin d'être constante, surtout au démarrage, il était impossible d'admettre que l'échelle des temps était respectée. On a donc eu recours, pour la mesure du rapport des fréquences, à la comparaison directe des deux oscillogrammes dont les figures 7 et 8 donnent des exemples typiques pour l'unisson et la sixte mineure exécutés par l'auteur.

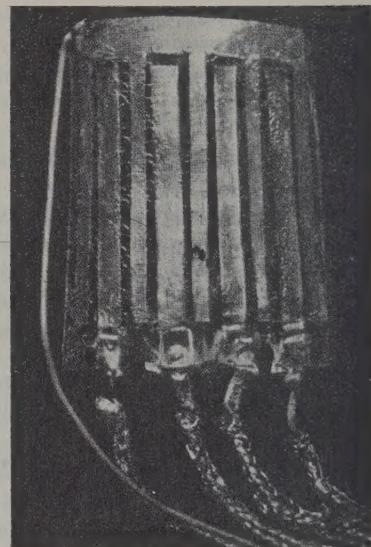


Fig. 5. Pièce composée de minces lamelles de cuivre servant d'électrodes positives pour les microphones (corde-électrode) captant séparément les vibrations des accords, avec les électrodes auxiliaires reliées à la masse.



Fig. 6. Pièce ci-contre (Fig. 5) montée sur le violon de marque GALIANO servant aux expériences réalisées.

Le film à dépouiller était placé dans un viseur à réticule dont la platine était munie d'un dispositif de déplacement micrométrique.

On prenait sur chacun des oscillogrammes un repère facilement reconnaissable, tel qu'une pointe A, A' (Fig. 9). Deux pointes successives A, A₁, A', A'₁

Erreurs

Les erreurs résultant de ce mode de dépouillement proviennent:

- de l'erreur de visée d'un point reconnaissable sur le premier oscillogramme,
- des erreurs dues au déplacement du micromètre,

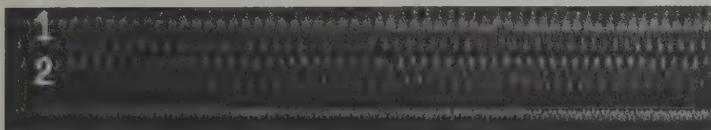


Fig. 7. L'unisson $la_3 - la_3 = 1,00012 = 0,208$ cents (écart $\approx 0,20$).

1) la_3 , corde libre; 2) la_3 , 4ème doigt sur la corde ré (accord réalisé par l'auteur). En bas les vibrations du diapason entretenu 1000 c/s. L'écart est donné par rapport à l'intervalle correspondant dans la gamme harmonique.



Fig. 8. Sixte mineure: $ré_4 - si_3^b$ en bas $ré_3$, corde libre- en haut, si_3^b , premier doigt sur la corde la (accord réalisé par l'auteur).

à l'origine, ou B, B₁, B', B'₁ à l'extrémité, représentent donc la durée d'une période T pour le premier phénomène et T' pour le second. On comp-

- des variations de vitesse du déroulement du film pendant une période unique à l'origine et à l'extrémité,
- de l'erreur de lecture du micromètre.

Il est facile de voir que ce sont les erreurs c et d qui sont les plus importantes, mais elles ne portent que sur $1/N$ du diagramme. Ce sont donc des erreurs du second ordre qu'on peut estimer négligeables.

Les expériences ont été effectuées en deux groupes espacés par quatre mois d'intervalle, pendant lequel nous avons perfectionné l'appareillage, en particulier le système microphonique, pour éviter absolument toute influence électrique des deux vibrations l'une sur l'autre. L'aspect de l'oscillogramme obtenu sur les deux canaux correspondant aux deux cordes quand l'une d'entre-elles seulement est attaquée par l'archet, et l'autre maintenue par le doigt pour l'empêcher de vibrer par résonance, a permis de voir que la diaphonie tant électrique que mécanique est supprimée. Si on lâche la corde inutilisée, celle-ci vibre à sa fréquence propre par l'effet du couplage mécanique, comme si l'archet excitait simultanément les deux cordes; chacune de celles-ci vibre sur les notes qui lui sont imposées par sa propre longueur. Il n'est pas douteux que ce phénomène joue un rôle essentiel dans le timbre des sons produits sur les instruments de musique.

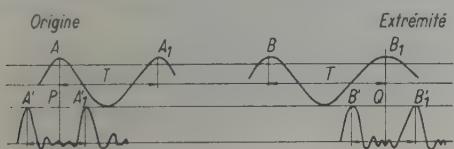


Fig. 9. Mode de dépouillement des oscilloscopes, entre A et B₁ on compte N vibrations, et, entre A'₁ et B'₁ N' vibrations.

tait alors sur l'un des phénomènes, le premier par exemple, $N=300$ oscillations complètes (entre A et B₁), le nombre d'oscillations du deuxième phénomène pendant ce temps était la somme:

- N' oscillations complètes (entre A'₁ et B'₁ dans la figure),
- de deux fractions d'oscillations à l'origine et à l'extrémité, représentées par les segments PA'₁ et QB'₁ de valeurs:

$$\frac{PA'_1}{A'A'_1} \text{ et } \frac{QB'}{B'B'_1}.$$

Le rapport de fréquences est donc:

$$I = \frac{\frac{PA'_1}{A'A'_1} + N' + \frac{QB'}{B'B'_1}}{N}.$$

Tableau II

Tableau comparatif des intervalles harmoniques mesurés à partir de consonances subjective des accords et ceux des gammes de PYTHAGORE et d'ARISTOXÈNE

| Intervalles | de PYTHAGORE | | d'ARISTOXÈNE | | Mesuré | | Ecart avec PYTHAGORE | Ecart avec ARISTOXÈNE |
|-------------------------------|------------------------|----------------------------------|------------------------|----------------------------------|------------------------|----------------------------------|----------------------|-----------------------|
| | Rapport des fréquences | Valeurs en savarts (et en cents) | Rapport des fréquences | Valeurs en savarts (et en cents) | Rapport des fréquences | Valeurs en savarts (et en cents) | | |
| la — la 3 3 unisson | 1 1 | 0 0 | 1 1 | 0 0 | 1,00012 | 0,052 0,208 | +0,052 +0,208 | +0,052 +0,208 |
| ré — ré 3 4 octave | 2 1 | 301,030 1200,000 | 2 1 | 301,030 1200,000 | 1,99970 | 300,965 1199,771 | -0,065 -0,259 | -0,065 -0,259 |
| la — mi 3 4 quinte | 3 2 | 176,091 701,954 | 3 2 | 176,091 701,954 | 1,50050 | 176,236 702,532 | +0,145 +0,578 | +0,145 +0,578 |
| mi — la 3 3 quarte | 4 3 | 124,939 498,045 | 4 3 | 124,939 498,045 | 1,33326 | 124,913 497,942 | -0,026 -0,103 | -0,026 -0,103 |
| fa — la 3 3 tierce maj. | 81 64 | 102,305 407,819 | 5 4 | 96,910 386,314 | 1,25002 | 96,914 386,329 | -5,391 -21,490 | +0,004 +0,015 |
| fa — la 3 3 tierce min. | 32 27 | 73,786 294,134 | 6 5 | 79,181 315,640 | 1,19911 | 78,594 313,34 | +4,809 +19,170 | -0,586 -2,336 |
| ré — si 3 3 sixte maj. | 27 16 | 227,244 905,866 | 5 3 | 221,849 884,399 | 1,66603 | 221,683 883,693 | -5,561 -22,168 | -0,166 -0,661 |
| la — fa 3 4 sixte min. | 128 81 | 198,725 792,213 | 8 5 | 204,120 813,686 | 1,60009 | 204,141 813,784 | +5,419 +21,571 | +0,024 +0,098 |

Tableau III

Tableau montrant le changement de « précision » des intervalles harmoniques quand ils sont joués dans des régions différentes du spectre sonore.

| Intervalles | de PYTHAGORE | | d'ARISTOXÈNE | | Mesuré | | Ecart avec PYTHAGORE | Ecart avec ARISTOXÈNE |
|------------------------------|------------------------|----------------------------------|------------------------|----------------------------------|------------------------|----------------------------------|----------------------|-----------------------|
| | Rapport des fréquences | Valeurs en savarts (et en cents) | Rapport des fréquences | Valeurs en savarts (et en cents) | Rapport des fréquences | Valeurs en savarts (et en cents) | | |
| ré — la 3 3 quinte | 3 2 | 176,091 701,954 | 3 2 | 176,091 701,954 | 1,50235 | 176,771 704,665 | +0,680 +2,771 | +0,680 +2,771 |
| la — mi 3 4 quinte | 3 2 | 176,091 701,954 | 3 2 | 176,091 701,954 | 1,50050 | 176,236 702,532 | +0,145 +0,578 | +0,145 +0,578 |
| ré — si 3 3 sixte min. | 128 81 | 198,725 792,213 | 8 5 | 204,120 813,686 | 1,59588 | 203,001 803,225 | +4,276 +17,013 | -1,119 -4,460 |
| la — fa 3 4 sixte min. | 128 81 | 198,725 792,213 | 8 5 | 204,120 813,686 | 1,60009 | 204,144 813,784 | +5,429 +21,571 | +0,024 +0,098 |

Les expériences ont été poursuivies après accord très soigné des cordes utilisées, cet accord étant vérifié avant chaque expérience. Les cordes sol, ré, la, étaient en boyau filées en argent d'excellente qualité et la corde mi en acier chromé. La comparaison des résultats obtenus pour les mêmes intervalles, dans les deux groupes d'expériences successifs, montre la parfaite stabilité des accords réalisés, leurs écarts restant pour tous les intervalles du

même ordre de grandeur. Il va sans dire que les doubles cordes ont été toujours jouées sans vibrato.

7. Résultats

Les résultats sont condensés dans les Tableaux II et III, dans lesquels nous avons donné la valeur des différents intervalles mesurés en savart et en cents, pour un groupe déterminé d'accords exécutés par l'auteur sur son violon de marque GALIANO, allant

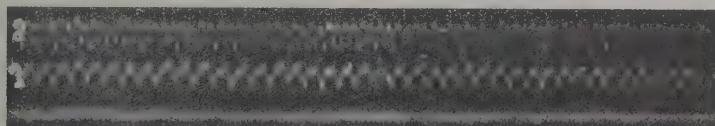


Fig. 10. Octave $\text{ré}_3 - \text{ré}_4 = 1,99970 = 1199,771$ cents (écart $\approx -0,26$).
1) ré_3 , corde libre; 2) ré_4 , 3ème doigt sur la corde la (accord réalisé par l'auteur). L'écart est donné par rapport à l'intervalle correspondant dans la gamme harmonique.



Fig. 11. Quarte: $\text{mi}_3 - \text{la}_3 = 1,33326 = 497,942$ cents (écart $\approx -0,1$);
1) mi_3 , doigt sur la corde ré; 2) la_3 , corde libre (accord réalisé par l'auteur).



Fig. 12. Tierce majeure: $\text{fa}_3 - \text{la}_3 = 1,25002 = 386,329$ cents (écart $= +0,02$).
1) fa_3 , 2ème doigt sur la corde ré; 2) la_3 , corde libre (accord réalisé par l'auteur).

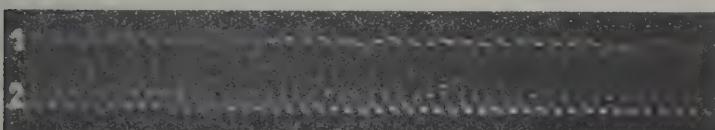


Fig. 13. Tierce mineure: $\text{fa}_3 - \text{la}_3 = 1,1911 = 313,304$ cents (écart $\approx -2,34$).
1) fa_3 , 2ème doigt sur la corde ré; 2) la_3 , corde libre (accord réalisé par l'auteur).



Fig. 14. Sixte majeure: $\text{ré}_3 - \text{si}_3 = 1,66603 = 883,698$ cents (écart $= -0,66$).
1) ré_3 , corde libre; 2) si_3 , premier doigt sur la corde la (accord réalisé par l'auteur).

des plus simples aux plus complexes avec leurs écarts respectifs par rapport aux intervalles correspondant dans la gamme de PYTHAGORE et dans la gamme d'ARISTOXÈNE. Les Fig. 7, 10 à 14 montrent les photos des enregistrements correspondants.

On peut déduire de ces tableaux les conclusions suivantes:

a) La sensibilité de l'oreille est très supérieure à ce qu'on aurait pu croire a priori; elle atteint facilement 1/10000 soit 0,2 cents environ pour les accords simples, ce qui est bien supérieur aux précisions que l'on peut atteindre avec des instruments à son purement sinusoïdal comme des oscillateurs (voir 3).

b) La quarte, avec l'écart de 0,1 de cents apparaît comme plus «précise» que la quinte (0,6 cents) et l'octave (0,3 cents) ce qui explique qu'elle ait été considérée par les anciens comme le cadre mélodique essentiel et l'intervalle le plus consonant.

c) L'ensemble des intervalles harmoniques appartient sans aucun doute à la gamme naturelle, ainsi que le montrent les écarts respectifs des intervalles mesurés avec ceux des gammes naturelle et pythagoricienne (Tableau II), les premiers étant toujours inférieurs aux seconds pour les intervalles de tierce et de sixte majeures et mineures, qui diffèrent notamment dans ces deux systèmes.

d) Le même intervalle pris dans la région des graves <400 c/s apparaît moins «précis» que quand il est pris dans une quinte plus aiguë. Le Tableau III en donne deux exemples pour la quinte juste et la sixte mineure. Il en résulte que l'oreille a une sensibilité à la consonance qui n'est pas constante et qui demanderait à être déterminée avec précision: on pourrait voir son rapport avec la sensibilité différentielle mesurée par certains auteurs.

Conclusion

Dans les conditions un peu spéciales où nous nous sommes placés pour effectuer ces expériences, cette étude montre, d'une façon très nette, que la gamme «naturellement» utilisée en harmonie et dans l'appréciation des consonances, est basée sur la gamme d'ARISTOXÈNE et non sur celle de PYTHAGORE. Des expériences antérieures ayant montré que la mélodie se basait sur la gamme de PYTHAGORE, il en résulte une confirmation des conclusions tirées par CORNU et MERCADIER, relatives à l'existence de deux gammes bien distinctes, l'une pour la mélodie et l'autre pour l'harmonie.

Nous poursuivons actuellement ces expériences en cherchant à établir ces conclusions sur une base plus générale, en faisant appel à un nombre suffisant d'exécutants et de formation musicale différente.

Cependant nous soulignerons que l'auteur — plus familiarisé avec la musique orientale de base Pythagoricienne — a «naturellement», comme nous l'avons constaté, réalisé les intervalles de la gamme harmonique et que l'assentiment qu'il donne à l'audition des quatuors à cordes bien exécutés par des artistes occidentaux, est un indice qu'il n'y a pas de différence flagrante entre les accords qu'il réalise et ceux qu'il entend.

On ne peut d'ailleurs manquer d'être frappé des variations observées entre les tolérances des différents intervalles. L'oreille apparaît comme un organe un peu mystérieux, dont les réactions sont encore bien mal connues à beaucoup d'égards.

(Reçu le 19 Février 1952.)

Bibliographie

- [1] SNOW, W. B., Change of pitch with loudness at low frequencies. *J. acoust. Soc. Amer.* **8** [1936], 176—180.
- [2] STEVENS, S. S., VOLKMANN, J. and NEWMAN, E. B., A scale for the measurements of the psychological magnitude pitch. *J. acoust. Soc. Amer.* **8** [1937], 185—190.
- [3] VON HELMHOLTZ, H., *Die Lehre der Tonempfindungen*. Leipzig 1863.
- [4] CORNU, A. et MERCADIER, E., *C. R. Acad. Sci.*, Paris **1**, 8 et 22 Févr., [1869], 301—308 et 434—427.
- [5] CORNU, A. et MERCADIER, E., *C. R. Acad. Sci.*, Paris **1**, 17 Juillet, [1873], 431—434 et 29 Janv., [1872], 312—323.
- [6] SMALL, A. M., An objective analysis of artistic violin performance. *Univ. of Iowa Studies in psych. of music.* **4** [1937], 172—231.
- [7] GREENE, P. C., 1. Violin performance with reference to tempered, natural and Pythagorean intonation. *Univ. of Iowa studies in psych. and music.* **4** [1937], 232—251. — 2. Violin intonation. *J. acoust. Soc. Amer.* **9** [1937], 43—44.
- [8] VAN ESBROECK, G. et MONFORT, F., *Qu'est-ce que jouer juste*. Bruxelles 1946.
- [9] BARKECHLI, M., 1. *De toonladder van tegenwoordige iranische muziek*. *Techn. wetensch. tijdschr.*, [1950], 58—60. — 2. *La gamme de la musique iranienne*. *Cah. d'Acoust.* **14** [1950] (parus dans les *Annales des Télécommunications* **5** [1950], 5).
- [10] BARKECHLI, M., *L'art sassanide, base de la musique arabe*. Presses Univers. Téhéran 1947.
- [11] SHOWER, E. G. and BIDDULPH, R., Differential pitch sensitivity of the ear. *J. acoust. Soc. Amer.* **3** [1937], 275—287.
- [12] STEVENS, S. S. and DAVIS, H., *Hearing, its psychology and physiology*. J. Wiley & Sons, New York 1939.

DIE DIFFUSION IN DER RAUMAKUSTIK

Von W. FURRER und A. LAUBER

Forschungs- und Versuchsanstalt der Generaldirektion PTT in Bern, Schweiz

Zusammenfassung

Es hat sich in den letzten Jahren immer deutlicher gezeigt, daß die klassischen Größen nicht genügen, um das akustische Verhalten eines Raumes hinreichend zu beschreiben. Außer dem Volumen, der Nachhallzeit und der nach geometrischen Überlegungen bestimmten Raumform spielt die Homogenität des Schallfeldes, die man auch „Diffusion“ nennen kann, eine sehr wichtige Rolle. Im vorliegenden Aufsatz wird zunächst gezeigt, daß die im stationären Zustand vorhandenen Frequenzgang-Schwankungen, die schon längst bekannt sind, nicht direkt ein Maß für diese Diffusion darstellen. Dagegen gelingt der empirische Nachweis, daß die „mittlere Höhe eines Berges“ dieser Schwankungen ein wichtiger Parameter ist, der die Homogenität des Schallfeldes unmittelbar beschreibt. Er wird für 11 Räume, deren Volumina zwischen 37 m^3 und 20000 m^3 liegen, bestimmt, und zwar jeweils für die Frequenzgebiete um 375 Hz und 1650 Hz.

Summary

It has become more and more evident in the last few years that the classical quantities are not sufficient to describe adequately the acoustic behaviour of a room. In addition to the volume, the reverberation time, and the shape of the room determined by geometrical considerations, the homogeneity of the sound field, which may also be called "diffusion", plays a very important part. It is shown in this paper that the frequency irregularities existing in the stationary state, which have been known for a long time, are not a direct measure for this diffusion. It is possible, however, to prove empirically that the "mean height of a peak" of these irregularities is an important parameter directly related to the homogeneity of the sound field. It is determined — for the frequency regions around 375 c/s and 1650 c/s — for 11 rooms, whose volumes range from 37 m^3 to 20000 m^3 .

Sommaire

Depuis ces dernières années on se rend de mieux en mieux compte du fait que les grandeurs classiques ne suffisent pas pour définir entièrement les qualités acoustiques d'un local. En plus du volume, de la durée de réverbération et de la forme du local déterminée d'après des considérations géométriques, l'homogénéité du champ acoustique, qu'on peut encore appeler « diffusion », joue un rôle très important. Le présent exposé montre tout d'abord que les fluctuations de la courbe de fréquence qu'on constate à l'état stationnaire (d'ailleurs connues depuis longtemps), ne représentent pas une mesure pour cette diffusion. En revanche, on peut prouver empiriquement que la « hauteur moyenne d'un sommet » de ces fluctuations est un important paramètre qui définit immédiatement l'homogénéité du champ acoustique. Ce paramètre a été déterminé pour 11 locaux d'un volume compris entre 37 m^3 et 20000 m^3 , chaque fois pour les gammes de fréquence voisines de 375 et 1650 Hz.

In einer früheren Arbeit [1] wurde der 1940 erreichte Stand der akustischen Behandlung von Radio-Studios dargestellt. Er war im wesentlichen dadurch charakterisiert, daß für jede Art und Größe eines Studios die optimale Nachhallzeitkurve festgelegt werden konnte und daß es gelungen war, die dafür notwendige Absorption in einfacher und sicherer Weise zu erreichen. Die Raumform wurde nur insofern als wichtig betrachtet, als es sich darum handelte, grobe Effekte wie z. B. Flatterechos, durchhängende Nachhallgeraden usw. festzustellen und zu beheben. Von diesen Betrachtungen abgesehen, wurde aber der Raumform wenig systematische Beachtung geschenkt; es wurde lediglich

darnach getrachtet, reflektierende parallele Flächen zu vermeiden.

1951 wurde mit der Fertigstellung des Neubaues des Radio-Studios in Bern, sowie Erweiterungsbauten in Basel und Zürich eine neue Bauetappe abgeschlossen, die in raumakustischer Beziehung wiederum durch erhebliche Fortschritte charakterisiert ist. Dabei steht aber im Gegensatz zu früher eine systematische Untersuchung des Einflusses der Raumform und der diffusen Reflexion im Vordergrund. Im Laufe eines zehnjährigen Betriebes 1940 bis 1950 schälten sich nämlich deutlich einige Beispiele von Radio-Studios heraus, die trotz einer ganz einwandfreien Nachhall-Frequenzkurve in

ihrem akustischen Verhalten nicht befriedigten und für die Regisseure und Studiotechniker Quellen ständiger Probleme bildeten. Das charakteristischste Beispiel war das Orchesterstudio in Genf (3500 m³), das bei seiner Eröffnung im Jahre 1940 als hervorragend beurteilt wurde, dann aber mehr und mehr Anlaß zu Kritik bot. Mit den stetig steigenden Ansprüchen wurden immer neue Orchester- und Mikrophonaufstellungen versucht, deren Erfolg jedoch unbefriedigend blieb. Schließlich wurde 1947 ein Versuch mit den in der Zwischenzeit besonders in Amerika bekannt gewordenen polyzyklindrischen Diffusoren gemacht, mit denen die großen glatten Seitenwände beim Orchesterpodium verkleidet wurden. Dieses rein empirische Vorgehen war von einem durchschlagenden Erfolg gekrönt; das Studio wird seither als völlig in Ordnung befunden. Ein anderes ähnliches Beispiel bildete ein Studio in Zürich (480 m³).

Diese Erfahrungen zeigten klar die Notwendigkeit, neben dem Volumen und der Nachhallzeit bzw. der Absorption noch einen weiteren Parameter einzuführen. Dieser soll den Homogenitätszustand des räumlichen Schallfeldes kennzeichnen, der frequenzabhängig durch die Art der Reflexion an den Begrenzungsfächen bestimmt ist. Es wurden zunächst ausgedehnte Versuche durchgeführt, um das Interferenzfeld des Raumes im stationären Zustand auszumessen. Solche Messungen sind schon aus früheren Arbeiten bekannt; FREI [2] hat 1935 bei konstanter Frequenz die Schalldruckverteilung in Räumen gemessen, WENTE [3] variierte, ebenfalls 1935, die von einem Lautsprecher abgestrahlte Frequenz langsam bei feststehender Meßstrecke, wobei der Frequenzgang des Raumes erhalten wird. 1950 wird dieses Problem von BOLT und ROOP [4] theoretisch behandelt; es gelingt dabei, für den parallelepipedischen Raum mit gleichmäßig verteilter Absorption die Frequenzgänge zu berechnen. 1951 benützten SOMERVILLE und WARD [5] für die Untersuchung eines Modellraumes (Flachraum) als Kriterium die abgewickelte Länge des Frequenzganges.

Abb. 1 zeigt einen typischen Ausschnitt eines solchen gemessenen Frequenzganges. Als Frequenzgang-Schwankung bezeichnen BOLT und ROOP:

$$F_v = \frac{\Sigma P_{max} - \Sigma P_{min}}{\Delta v}.$$

Dabei bedeuten:

ΣP_{max} Summe der Schalldruckmaxima („Berge“),
 ΣP_{min} Summe der Schalldruckminima („Taler“),
 Δv Frequenzbereich.

Es schien zunächst, daß diese Größe F_v ein wichtiges Kriterium für das akustische Verhalten eines Raumes, ganz besonders eines Radio-Studios, sei.

Da ferner, wie bereits erwähnt, eine zuverlässige Statistik über die subjektive Beurteilung einer großen Zahl verschiedener Räume vorliegt, ist es möglich, nach einer Korrelation zwischen den subjektiven Bewertungen und der Größe F_v zu fragen. Dabei müßte es sich herausstellen, ob F_v ein brauchbares Maß für die „Diffusion“ darstellt, worunter in diesem Falle die Homogenität des Schallfeldes zu verstehen wäre.

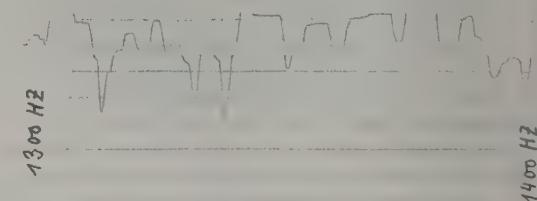


Abb. 1. Frequenzgang eines Raumes von 83 m³; 1300 ... 1400 Hz; Ordinatenteilung 5 db.

Als erster Schritt wurde das Meßverfahren festgelegt. Das System eines Trichter-Lautsprechers diente als quasipunktförmige Schallquelle; seine verhältnismäßig große mechanische Impedanz gewährleistet zudem, daß die Strahlung von der akustischen Belastung praktisch unabhängig wird; ferner ist auch der Frequenzgang eines solchen Systems verhältnismäßig flach.

Zunächst wurde der Einfluß des Abstandes Lautsprecher-Mikrophon untersucht, wozu in zwei Räumen auf bestimmten Meßstrecken F_v als Funktion des Abstandes gemessen wurde. Der auf das Mikrophon fallende Schall setzt sich aus zwei Anteilen zusammen:

a) aus dem direkten Schall mit der Energiedichte E_0 :

$$E_0 = \frac{P}{4\pi d^2 c} \quad P = \text{Leistung der Schallquelle}, \quad d = \text{Abstand von der Schallquelle}, \quad c = \text{Schallgeschwindigkeit}.$$

b) aus dem indirekten Schall mit der Energiedichte E_r (nach SABINE):

$$E_r = \frac{4P}{cA}; \quad A = \sum \alpha_i S_i = \text{Totale Absorption des Raumes}.$$

In einem Raum entspricht daher jedem Abstand d zwischen Mikrophon und Schallquelle ein bestimmtes Verhältnis des indirekten Schalles zum direkten Schall:

$$d = \sqrt{\frac{A}{16\pi} \cdot \frac{E_r}{E_0}}.$$

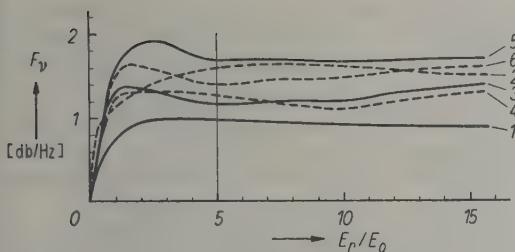


Abb. 2. Frequenzgang-Schwankungen F_v in Funktion des Abstandes Lautsprecher-Mikrofon;

| | | | | |
|-----|-------------|-----------------------|-----------------|----------|
| (1) | Raumvolumen | 330 m ³ , | Frequenzbereich | 375 Hz, |
| (2) | " | 330 m ³ , | " | 1650 Hz, |
| (3) | " | 1100 m ³ , | " | 375 Hz, |
| (4) | " | 1100 m ³ , | " | 1650 Hz, |
| (5) | " | 1100 m ³ , | " | 375 Hz, |
| (6) | " | 1100 m ³ , | " | 1650 Hz. |

(3) und (5), bzw. (4) und (6) wurden an verschiedenen Orten gemessen.

In der Abb. 2 sind die gemessenen Werte von F_v als Funktion dieses Verhältnisses aufgetragen. Es geht daraus hervor, daß für $E_r/E_0 > 5$ F_v praktisch konstant bleibt, so daß für alle Messungen von F_v d wie folgt gewählt wurde:

$$d = \sqrt{0,1} \text{ A.}$$

Ferner wurde die Meßgenauigkeit der F_v -Messungen untersucht; dazu wurden in zwei Räumen je drei Meßstrecken festgelegt, für die die Messungen jeweils fünfmal wiederholt wurden. Die größte Abweichung zwischen diesen sechs Meßreihen betrug $\pm 3\%$. Endlich wurde der Einfluß des Ortes der Meßstrecke geprüft, wobei in einem Raum von 330 m³ zwölf verschiedene Lagen ausgemessen wurden; dabei ergab sich eine mittlere Abweichung vom algebraischen Mittelwert von $\pm 10\%$. Diese verhältnismäßig große Streuung macht es notwendig, in jedem Raum an verschiedenen Stellen zu messen; die vorliegenden Untersuchungen umfassen jeweils Messungen an sechs Orten.

Für die Berechnung der Mittelwerte einzelner Frequenzbereiche wurde die von BOLT und ROOP vorgeschlagene Mittelwertsbildung [4] übernommen, wobei mit abnehmendem Gewicht die F_v -Werte der Nachbarfrequenzen berücksichtigt werden. Durch Verbinden der Mittelpunkte zwischen je zwei Punkten der ursprünglichen Kurve wird eine neue Kurve erhalten (Abb. 3); durch sech-

maliges Wiederholen dieses Verfahrens wird eine genügende Glättung des gewöhnlich sehr unregelmäßigen Kurvenverlaufs erzielt, wobei dies auch algebraisch gemacht werden kann:

Zu sieben aufeinander folgenden Frequenzintervallen v_1 bis v_7 gehören die Werte $F_{v1} \dots F_{v7}$. Der Mittelwert (für F_{v4}) berechnet sich nun unter Berücksichtigung der beidseitig benachbarten F_{v1} bis F_{v7} wie folgt:

$$F_{v4} =$$

$$F_{v1} + 6F_{v2} + 15F_{v3} + 20F_{v4} + 15F_{v5} + 6F_{v6} + F_{v7} \quad 64$$

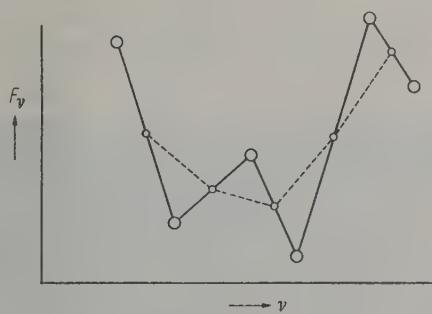


Abb. 3. Mittelwertbildung der Frequenzgang-Schwankungen;
—○— gemessene Werte,
—○— Mittelwertskurve.

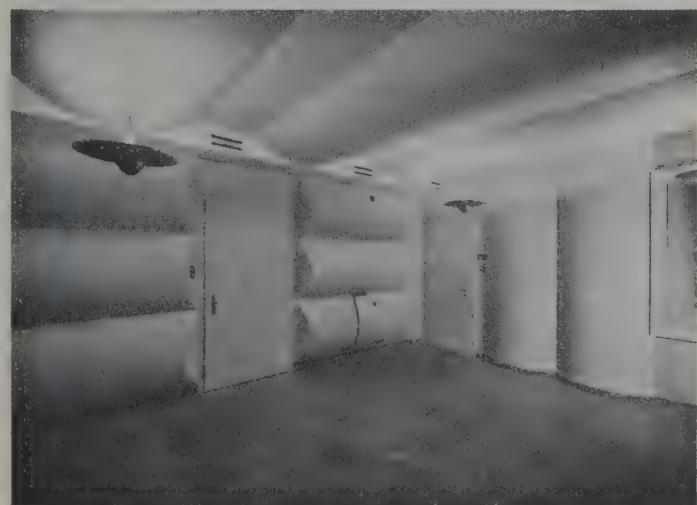


Abb. 4. Hörspielstudio (83 m³) mit polzyklindrischen Diffusoren.

Die Gewichtsfaktoren, mit denen die Nachbarfrequenzen bewertet werden, sind also die Binomalkoeffizienten.

Mit diesem Verfahren wurden zahlreiche Räume untersucht, deren Volumina zwischen 37 m³ und

20 000 m³ lagen. Aus der großen Anzahl der Meßergebnisse werden hier nur zwei Beispiele angeführt:

In einem Hörspielstudio (83 m³) wurde F_V vor und nach dem Anbringen der polzyklindrischen Diffusoren gemessen (Abb. 4). Die über den ganzen Frequenzbereich ausgewertete Größe F_V für beide Fälle zeigt Abb. 5. Es geht daraus hervor, daß F_V

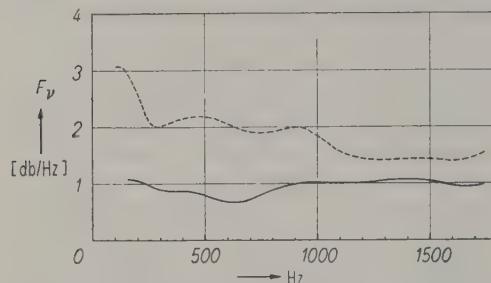


Abb. 5. Frequenzgang-Schwankungen F_V eines Hörspielstudios (83 m³);
----- ohne polzyklindrische Diffusoren,
— mit polzyklindrischen Diffusoren.

unter dem Einfluß der eingebrachten Diffusoren wohl bei den tiefen und mittleren Frequenzen deutlich sinkt, bei den hohen Frequenzen aber kaum. In einem Konzertstudio (2230 m³, Abb. 6) hat sich dagegen durch den Einbau sehr kräftig profilierter polzyklindrischer Diffusoren die Größe F_V nur unwesentlich verändert (Abb. 7), trotzdem der subjektive Erfolg sehr deutlich war.

Da das Auswerten der Größe F_V über den ganzen Frequenzbereich sehr mühsam ist, beschränkte man sich auf zwei typische Gebiete. Der Mittelwert des

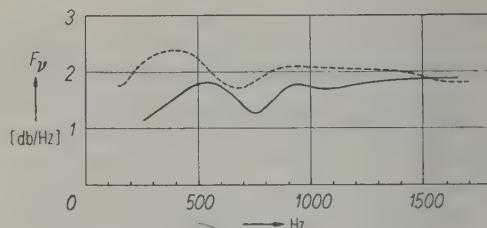


Abb. 7. Frequenzgang-Schwankungen F_V eines Orchesterstudios (2230 m³);
----- ohne polzyklindrische Diffusoren,
— mit polzyklindrischen Diffusoren.

einen beträgt 375 Hz, des andern 1650 Hz; dabei wird keine Rücksicht auf die Raumgröße genommen, diese Werte bestimmen sich vielmehr aus der Art der Schallquellen, die ja überall die gleichen sind. Bei der unteren gewählten Frequenz liegt das

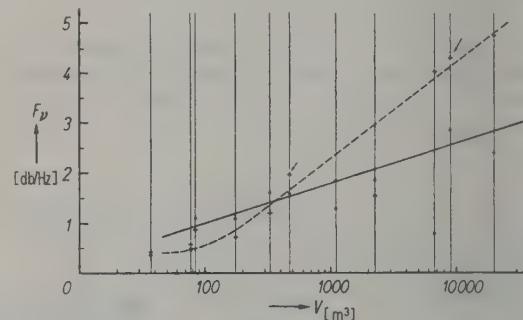


Abb. 8. Frequenzgang-Schwankungen F_V in Funktion des Raumvolumens;
----- Frequenzbereich 375 Hz,
— Frequenzbereich 1650 Hz.



Abb. 6. Orchesterstudio (2230 m³) mit polzyklindrischen Diffusoren; vier weitere sind im Bilde nicht sichtbar.

Maximum der Energie der menschlichen Sprache [6], sowie sehr vieler Musikinstrumente wie z. B. Klavier, viele Blasinstrumente, Streichinstrumente usw. [7]. Die obere Frequenz liegt mit 1650 Hz etwas oberhalb der Mitte des ganzen Frequenzbereiches; dieses Gebiet ist sowohl für die Verständlichkeit von Sprache als auch für viele harmonische Teiltöne der Musikinstrumente wichtig. Vom subjektiven Standpunkt aus läßt sich auch sagen, daß der Bereich um 375 Hz wichtig für die „Tonfülle“ ist, während der Bereich um 1650 Hz maßgebend für die „Klarheit“ einer Übertragung ist. Frequenzen oberhalb etwa 3000 Hz sind in diesem Zusammenhang nicht mehr so in-

teressant, da hier die Richtwirkungen von Schallquelle und Empfänger sowie ihre unmittelbare Umgebung eine größere Rolle spielen als irgend eine mittlere Raumeigenschaft.

Abb. 8 zeigt die für die beiden erwähnten Frequenzbereiche gemessenen Frequenzgang-Schwankungen. Das Bild ist unklar, es ist keine Systematik ersichtlich und insbesondere treten die beiden subjektiv als schwierig bekannten Räume: ein Studio von 480 m^3 und ein Konzertsaal von 9500 m^3 (mit „Pfeil“ bezeichnet) nicht besonders hervor. Man muß daraus schließen, daß die Frequenzgang-Schwankungen selbst offenbar nicht direkt ein brauchbares raumakustisches Kriterium darstellen. Hier setzt nun die folgende Überlegung ein: Wenn das anzustrebende Ziel ein möglichst homogenes Schallfeld ist, dann dürfen die Frequenzgang-Schwankungen wohl sehr viele kleine „Berge“ aufweisen, nicht aber nur wenige große. Der Unterschied zwischen diesen beiden Zuständen wird aber durch die Größe F_v nicht erfaßt. Er wird nur dann erhalten, wenn wir die *mittlere* Höhe aller „Berge“ berücksichtigen, d. h. wenn wir die Größe F_v durch die Anzahl n der „Berge“ dividieren. Auf diese Weise erhalten wir die neue Größe

$$D_v = F_v / n,$$

worin n die Anzahl der Schalldruckmaxima bedeutet.

Wie die Abb. 9 zeigt, erhält man damit ein vollständig verändertes Bild. Man sieht zunächst sehr deutlich, daß D_v bei 1650 Hz nur etwa halb so groß ist wie bei 375 Hz. Dies ist ohne weiteres einleuchtend, da es in jedem Raum sehr viel mehr Unebenheiten gibt, die in der Größenordnung der Wellenlänge von 20 cm (1650 Hz) liegen, als solche der Wellenlänge 90 cm (375 Hz). Ferner heben sich nun das subjektiv als „schwierig“ bekannte Studio von 480 m^3 , sowie der „schlechte“ Konzertsaal von 9500 m^3 (mit „Pfeil“ bezeichnet) deutlich von den übrigen ab. Der größte untersuchte Raum (20000 m^3) war eine Barockkirche aus dem 17. Jahrhundert (Abb. 10), die eine ausgesprochen diffuse Reflexion aufweist und deren akustische Verhältnisse als sehr gut bekannt sind. Weiter kann man auch an den früher von FREI gemessenen

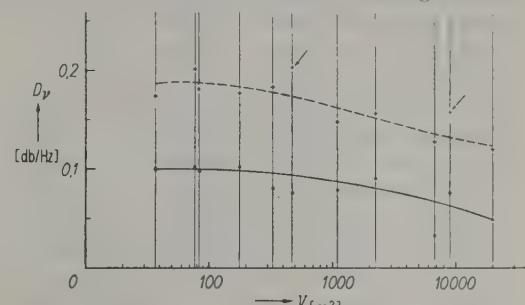


Abb. 9. Diffusion D_v in Funktion des Raumvolumens;
----- Frequenzbereich 375 Hz,
— Frequenzbereich 1650 Hz.



Abb. 10. Barockkirche mit diffuser Reflexion.

Resultaten zeigen, daß durch die dort untersuchte Kassettierung die Größe F_v (dort in Funktion des Abstandes gemessen) zunimmt und erst die Größe D_v den richtigen Einfluß der Kassetten auf die Homogenität des Schallfeldes erkennen läßt.

Die so definierte Größe D_v ist also um so kleiner, je homogener das Schallfeld und je größer die Diffusion ist; wir möchten sie daher als ein Maß für die „Diffusion“ bezeichnen. Dabei ist es klar, daß D_v nicht ausschließlich von der Form des betreffenden Raumes abhängt, sondern auch noch von anderen Faktoren, so vor allem von der Absorption. In einem vollständig absorbierenden Raum würde ja F_v und damit auch D_v gegen 0 tendieren. Dieser Einfluß konnte noch nicht im einzelnen untersucht werden, doch finden sich in der bereits zitierten Arbeit von WENTE [3] schon Angaben über den Einfluß der Absorption auf die Frequenzgang-Schwankungen. Die von WENTE gemessene Kurve läßt sich durch den Ausdruck $F_v = k\alpha^{-1.8}$ analytisch approximieren. Es geht daraus hervor, daß der Einfluß der Absorption mit steigendem mittlerem Absorptionskoeffizienten rasch abnimmt. Da alle hier untersuchten Räume einen größeren mittleren Absorptionskoeffizienten als 0,1, in sieben Fällen sogar als 0,2 aufweisen, wurde auf eine Berücksichtigung

verzichtet, da sie das Bild nur sehr wenig verändern würde. Die dargestellte Diffusion D_v ist daher als „Betriebsdiffusion“ zu betrachten, die neben dem Einfluß der Raumform zu einem viel kleineren Teil auch noch den Einfluß der Raumabsorption in sich schließt.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß die Diffusion D_v , so wie sie oben definiert ist, ein neues und anscheinend brauchbares Kriterium für die Homogenität des Schallfeldes und damit für das akustische Verhalten eines Raumes bildet. Sie muß in akustisch einwandfreien Räumen unterhalb der beiden Kurven der Abb. 9 liegen.

(Eingegangen am 28. April 1952.)

Schrifttum

- [1] FURRER, W., Schweizer Archiv f. Wissenschaft. u. Techn. **8** [1942], 77.
- [2] FREI, H., Elektroakustische Untersuchungen in Hallräumen. Deuticke Verlag, Leipzig/Wien 1935.
- [3] WENTE, E. C., J. acoust. Soc. Amer. **7** [1935], 123.
- [4] BOLT, R. H. and ROOP, R. W., J. acoust. Soc. Amer. **22** [1950], 280.
- [5] SOMERVILLE, T. and WARD, F. L., Acustica **1** [1951], 40.
- [6] BERANEK, L. L., Proc. Inst. Radio Engrs. **35** [1947], 880.
- [7] SIVIAN, L. J., DUNN, H. K. and WHITE, S. D., J. acoust. Soc. Amer. **2** [1931], 330.

ÉTUDE DES ÉCHOS DES ONDES ACOUSTIQUES DANS LE MILIEU STRATIFIÉ DE LA TROPOSPHÈRE

Par GOTTFRIED ECKART

Office National d'Études et de Recherches Aéronautiques, Paris
et Institut de Physique de l'Université de la Sarre

En hommage du 80. anniversaire de Mr. K. T. Fischer à Munich

Sommaire

Dans le présent travail, nous nous occuperons des échos des ondes acoustiques produits par la stratification de l'atmosphère en nous fondant sur une méthode de BREMMER et sur une méthode de SCHELKUNOFF.

Dans cette étude l'influence des termes qui troublent l'analogie avec les ondes électriques, selon le travail précédent [1], apparaît clairement.

Zusammensetzung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Reflexion akustischer Wellen infolge der Schichtung der Atmosphäre und stützt sich dabei auf eine Methode von BREMMER und eine von SCHELKUNOFF.

Der Einfluß der Terme, die die Analogie zu den elektrischen Wellen stören (siehe die vorangehende Arbeit [1]), kommt klar zum Ausdruck.

Summary

This paper deals with the echoes of sound waves produced by a stratified atmosphere, by the methods of BREMMER and SCHELKUNOFF.

In this study the influence of those terms which spoil the analogy with electric waves (cf. the preceding paper [1]) becomes clearly apparent.

1. Les équations différentielles pour une onde acoustique dans un milieu stratifié par la gravitation

Dans ce qui suit, nous supposons une atmosphère au repos qui est stratifiée le long de l'axe des z positifs par suite de la gravitation et dont la pression, la densité et la température dépendent également de z .

En négligeant les termes non linéaires, on obtient dans ce cas les équations¹:

$$-\frac{d\bar{p}}{dz} = j\omega\rho_0 v + \frac{g\rho_0}{p_0\gamma} \cdot \bar{p}, \quad (1)$$

$$-\frac{dv}{dz} = \frac{j\omega}{p_0\gamma} \cdot \bar{p} + \frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{d\rho_0}{dz} \cdot v \quad (2)$$

où g est l'accélération de la pesanteur.

On obtient ces équations en posant:

1. Les équations d'EULER de l'écoulement des fluides, où l'on tient compte de la gravitation qui agit vers le bas, ce qui se manifeste dans le terme qui contient g ,
2. l'équation de la continuité,
3. l'équation d'état adiabatique.

Il y a des cas où l'on peut négliger les termes qui ne contiennent pas ω dans le membre de droite des équations (1) et (2), en particulier quand ω est suffisamment grand, mais de façon générale, cela n'est pas possible. Nous voyons donc que l'analogie qui existe dans un milieu homogène se trouve perturbée dans un milieu hétérogène par ces deux termes.

Cela a pour conséquence que dans un milieu stratifié d'une manière continue par la gravitation, les ondes acoustiques subissent toujours une réflexion interne. Nous n'en donnons pas la preuve ici, le lecteur la trouvera dans la référence [1].

2. La solution à l'aide d'une méthode W K B, d'après Bremmer

Dans le cas des ondes électromagnétiques planes qui se propagent dans le plan yz dans une atmosphère stratifiée où ϵ est fonction de la coordonnée z , BREMMER [2], [3], [4] a élaboré une méthode particulièrement claire et élégante qui est une variante de la méthode connue W K B. BREMMER suppose un champ E polarisé dans le plan yz et une seule composante H_x . Etant donné l'analogie formelle, mais toutefois incomplète qui existe avec les équations qui régissent la propagation des ondes électriques, nous allons traiter le problème acoustique par la méthode de BREMMER qui ne nécessite que de petites modifications.

3. Les équations de Maxwell pour les ondes planes dans un milieu stratifié — leur résolution d'après Bremmer

Pour être compris par la suite et éviter au lecteur de se reporter à des ouvrages de références difficiles à aborder, nous allons exposer brièvement la méthode de BREMMER. Contrairement à BREMMER, nous supposons que le champ H est polarisé dans le plan d'incidence, le champ E lui étant perpendiculaire (composante E_x seulement).

Dans le système de coordonnées de la Fig. 1 les équations de MAXWELL s'écrivent:

$$j\omega\epsilon_0\epsilon(z)E_x = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}, \quad (3)$$

$$j\omega\mu_0\mu(z)H_y = -\frac{\partial E_x}{\partial z}, \quad (4)$$

$$j\omega\mu_0\mu(z)H_z = \frac{\partial E_x}{\partial y} \quad (5)$$

Fig. 1 avec $e^{+j\omega t}$ comme fonction du temps,

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} [\text{F/m}], \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} [\text{H/m}].$$

Introduisons l'angle d'incidence τ qui, pour $z=0$, prend la valeur τ_a . On a par suite:

$$\omega\sqrt{\epsilon_0\epsilon(z)\mu_0\mu(z)} \sin\tau(z) = \omega\sqrt{\epsilon_0\epsilon(0)\mu_0\mu(0)} \sin\tau_a. \quad (6)$$

D'après BREMMER, on écrit maintenant les trois intensités E_x , H_y , H_z , du champ en utilisant le symbole:

$$k = k(z) = \omega\sqrt{\epsilon_0\epsilon(z)\mu_0\mu(z)}, \quad (7)$$

$$Y = \sqrt{\frac{\epsilon_0\epsilon(z)}{\mu_0\mu(z)}} = \frac{1}{Z} \quad (8)$$

où Z est l'impédance caractéristique, par suite

$$E_x = -\frac{\exp(-jky \sin\tau)}{\sqrt{Y \cos\tau}} [\chi_1(z) \cdot \exp(-j \int_0^z k \cos\tau dz) + \chi_2(z) \cdot \exp(+j \int_0^z k \cos\tau dz)], \quad (9)$$

$$H_y = \exp(-jky \sin\tau) \cdot \sqrt{Y \cos\tau} \cdot [-\chi_1(z) \cdot \exp(-j \int_0^z k \cos\tau dz) + \chi_2(z) \cdot \exp(+j \int_0^z k \cos\tau dz)], \quad (10)$$

$$H_z = \exp(-jky \sin\tau) \sqrt{\frac{Y}{\cos\tau}} \cdot [\chi_1(z) \cdot \exp(-j \int_0^z k \cos\tau dz) + \chi_2(z) \cdot \exp(j \int_0^z k \cos\tau dz)]. \quad (11)$$

¹ \bar{p} , ρ_0 , p_0 , v : voir chapitre 4.

Nous remarquons que les équations de MAXWELL ne donnent d'abord que les relations entre les trois termes avant les crochets. On peut les multiplier par une fonction quelconque; et en introduisant les fonctions $\chi_1(z)$ et $\chi_2(z)$ dans les équations de MAXWELL on détermine ensuite les amplitudes des ondes dirigées vers le haut ou vers le bas sous une forme que l'on peut donner immédiatement. Si l'on avait multiplié auparavant par un autre facteur $f(z)$ on aurait eu simplement $\chi_{1,2}(z)/f(z)$.

En introduisant ceci dans les équations de MAXWELL, BREMMER trouve pour χ_1 et χ_2 , le système d'équations intégrales:

$$\chi_1(z) = \int_{-\infty}^z \chi_2(z) \cdot \exp(2j \int_0^z k \cos \tau dz) \frac{d}{dz} (\ln \sqrt{Y} \cos \tau) dz, \quad (12)$$

$$\chi_2(z) = \int_{+\infty}^z \chi_1(z) \cdot \exp(-2j \int_0^z k \cos \tau dz) \frac{d}{dz} (\ln \sqrt{Y} \cos \tau) dz \quad (13)$$

que l'on peut résoudre facilement par approximations successives et l'on obtient les réflexions des différents ordres; on choisit la première approximation de façon telle que pour

$$\frac{d}{dz} \ln \sqrt{Y} \cos \tau = 0, \quad \chi_1 = 1.$$

Ce dernier quotient différentiel représente, comme BREMMER l'a montré, le facteur de réflexion du milieu stratifié par unité de longueur.

4. Les équations acoustiques analogues et le terme correctif supplémentaire

Nous écrivons maintenant les équations différentielles limitées aux termes linéaires qui régissent la propagation des ondes acoustiques dans une atmosphère stratifiée soumise à l'accélération de la pesanteur g . Les notations employées sont les suivantes:

$p_0(z)$ = pression de l'atmosphère au repos,

$\bar{p}(z)$ = amplitude de la pression acoustique,

$\rho_0(z)$ = densité de l'atmosphère au repos,

$v_{x,y}$ = x, y -composants de la célérité (vitesse d'une particule d'air),

g = accélération de la pesanteur,

γ = rapport des chaleurs spécifiques $= c_p/c_v = 1.4$.

Les équations de la propagation du son ont pour base: les équations d'EULER de l'hydrodynamique, l'équation de continuité et l'équation d'état adiabatique. On a:

$$\frac{j \omega \bar{p}}{\rho_0 \gamma} = - \frac{\partial v_y}{\partial y} \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{d \rho_0}{dz} \cdot v_z, \quad (14)$$

$$-j \omega \rho_0 v_y = \frac{\partial \bar{p}}{\partial y}, \quad (15)$$

$$j \omega \rho_0 v_z = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} - \frac{\rho_0 g}{\rho_0 \gamma} \cdot \bar{p}. \quad (16)$$

Si nous faisons correspondre maintenant dans le schéma suivant les grandeurs électriques de la première ligne aux grandeurs acoustiques de la seconde ligne, nous voyons dans les équations (14) et (16) une analogie qui n'est perturbée que par les termes soulignés à l'extrême droite.

Grandeurs électriques

$$\epsilon_0 \epsilon(z), \mu_0 \mu(z), E_x, H_z, H_y,$$

Grandeurs acoustiques

$$\frac{1}{\gamma p_0(z)}, \rho_0(z), \bar{p}, -v_y, v_z.$$

Remarquons que cette analogie connue n'est pas la seule possible. Si nous négligeons les termes soulignés, dans les équations (14) et (16) les relations de BREMMER donnent la solution de notre problème, mais elles sont écrites cette fois avec d'autres symboles.

Nous allons étudier maintenant l'influence de ces termes; introduisons encore les notations suivantes:

$$Y_{ac} = 1/Z_{ac} = 1/\sqrt{\gamma p_0(z) \rho_0(z)}, \quad (17)$$

$$\omega \sqrt{\frac{\rho_0(z)}{\gamma p_0(z)}} \cdot \sin \tau(z) = \omega \sqrt{\frac{\rho_0(0)}{\gamma p_0(0)}} \cdot \sin \tau_0 \quad (18)$$

où $\tau(z)$ et τ_0 sont les angles d'incidence aux altitudes z et 0 respectivement. Nous posons d'autre part:

$$k(z) = \omega \sqrt{\frac{\rho_0(z)}{\gamma p_0(z)}} \quad (19)$$

et nous écrivons de façon analogue à (9), (10), et (11)

$$\bar{p} = \frac{\exp[-jk(z)y \sin \tau(z)]}{Y_{ac} \cos \tau(z)} \left\{ \bar{\chi}_1(z) \cdot \exp[-j \int_0^z k \cos \tau(z) dz] + \bar{\chi}_2(z) \cdot \exp[j \int_0^z k \cos \tau(z) dz] \right\}, \quad (20)$$

$$v_z = \exp[-jk(z)y \sin \tau(z)] Y_{ac} \cos \tau(z) \left\{ -\bar{\chi}_1(z) \cdot \exp[-j \int_0^z k \cos \tau(z) dz] + \bar{\chi}_2(z) \cdot \exp[j \int_0^z k \cos \tau(z) dz] \right\}, \quad (21)$$

$$-v_y = \exp[-jk(z)y \sin \tau(z)] \sqrt{\frac{Y_{ac}}{\cos \tau(z)}} \left\{ \bar{\chi}_1(z) \cdot \exp[-j \int_0^z k \cos \tau(z) dz] + \bar{\chi}_2(z) \cdot \exp[j \int_0^z k \cos \tau(z) dz] \right\}. \quad (22)$$

Nous obtenons ensuite en introduisant dans (14), (15), et (16), le système:

$$\frac{d\bar{\chi}_1(z)}{dz} = \bar{\chi}_2(z) \cdot \exp(2j \int_0^z k \cos \tau dz) \left[\frac{d}{dz} \ln \sqrt{Y_{ac} \cos \tau(z)} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{d\rho_0}{dz} + \frac{g\rho_0}{p_0 \gamma} \right) \right] + \bar{\chi}_1(z) \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{d\rho_0}{dz} + \frac{g\rho_0}{p_0 \gamma} \right), \quad (23)$$

$$\frac{d\bar{\chi}_2(z)}{dz} = \bar{\chi}_1(z) \cdot \exp(-2j \int_0^z k \cos \tau dz) \left[\frac{d}{dz} \ln \sqrt{Y_{ac} \cos \tau(z)} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{d\rho_0}{dz} + \frac{g\rho_0}{p_0 \gamma} \right) \right] + \bar{\chi}_2(z) \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{d\rho_0}{dz} + \frac{g\rho_0}{p_0 \gamma} \right). \quad (24)$$

Ce système a la forme:

$$\frac{d\bar{\chi}_1(z)}{dz} = a_{11}(z)\bar{\chi}_1(z) + a_{12}(z)\bar{\chi}_2(z), \quad (25)$$

$$\frac{d\bar{\chi}_2(z)}{dz} = a_{21}(z)\bar{\chi}_1(z) + a_{22}(z)\bar{\chi}_2(z) \quad (26)$$

que nous allons mettre sous une forme plus pratique de façon qu'il y ait toujours une des fonctions cherchées qui figure à droite. A cet effet, nous écrivons:

$$\bar{\chi}_1 = p_1 \chi^*_1, \quad \bar{\chi}_2 = p_2 \chi^*_2 \quad (27)$$

par suite:

$$\bar{\chi}_1' = p_1' \chi^*_1 + p_1 \chi^*_1' = a_{11}(z) p_1 \chi^*_1 + a_{12}(z) p_2 \chi^*_2, \quad (28)$$

$$\bar{\chi}_2' = p_2' \chi^*_2 + p_2 \chi^*_2' = a_{21}(z) p_1 \chi^*_1 + a_{22}(z) p_2 \chi^*_2. \quad (29)$$

Nous fixons p_1 et p_2 de façon à tirer les termes soulignés de (28) et (29)

$$p_1' \chi^*_1 = a_{11}(z) p_1 \chi^*_1; \quad p_1 = C_1 \cdot \exp \left[\int_0^z a_{11}(z) dz \right], \quad (30)$$

$$p_2' \chi^*_2 = a_{22}(z) p_2 \chi^*_2; \quad p_2 = C_2 \cdot \exp \left[\int_0^z a_{22}(z) dz \right]. \quad (31)$$

Il ressort du système (23), (24) que:

$$a_{11}(z) = a_{22}(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{d\rho_0}{dz} + \frac{g\rho_0}{p_0 \gamma} \right) \quad (32)$$

si bien que:

$$p_1 = p_2 = C \cdot \exp \left[\frac{1}{2} \int_0^z \left(\frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{d\rho_0}{dz} + \frac{g\rho_0}{p_0 \gamma} \right) dz \right] \quad (33)$$

et

$$\chi^*_1' = \chi^*_1 \cdot \exp(2j \int_0^z k \cos \tau dz).$$

$$\cdot \left[\frac{d}{dz} \ln \sqrt{Y_{ac} \cos \tau} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{d\rho_0}{dz} + \frac{g\rho_0}{p_0 \gamma} \right) \right], \quad (34)$$

$$\chi^*_2' = \chi^*_2 \cdot \exp(-2j \int_0^z k \cos \tau dz).$$

$$\cdot \left[\frac{d}{dz} \ln \sqrt{Y_{ac} \cos \tau} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{d\rho_0}{dz} + \frac{g\rho_0}{p_0 \gamma} \right) \right]. \quad (35)$$

Nous voyons donc que nous obtenons avec les termes supplémentaires un facteur d'amplitude purement réel pour nos grandeurs $\bar{\chi}_1$ et $\bar{\chi}_2$.

Écrivons maintenant ce système de façon analogue à (12), (13):

$$\chi^*_1 = \int_{-\infty}^z \chi^*_2 \cdot \exp(2j \int_0^z k \cos \tau dz) \cdot \left[\frac{d}{dz} \ln \sqrt{Y_{ac} \cos \tau} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{d\rho_0}{dz} + \frac{g\rho_0}{p_0 \gamma} \right) \right] dz, \quad (36)$$

$$\chi^*_2 = \int_{-\infty}^z \chi^*_1 \cdot \exp(-2j \int_0^z k \cos \tau dz) \cdot \left[\frac{d}{dz} \ln \sqrt{Y_{ac} \cos \tau} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{d\rho_0}{dz} + \frac{g\rho_0}{p_0 \gamma} \right) \right] dz. \quad (37)$$

Comme BREMMER l'a montré, on peut résoudre ce système par approximations successives, un terme en χ_2 représente toujours la réflexion provenant du terme en χ_1 précédent et vice versa. Nous ne calculerons que la première réflexion qui est due à une onde oblique se propageant vers le haut avec $\bar{\chi}_1^{(0)} = 1$ où $\bar{\chi}_1^{(0)}$ est la première approximation d'indice 0. Par suite, on a:

$$\chi^*_1^{(0)} = \exp \left[-\frac{1}{2} \int_0^z \left(\frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{d\rho_0}{dz} + \frac{g\rho_0}{p_0 \gamma} \right) dz \right] \quad (38)$$

et

$$\chi^*_2^{(0)} = \int_{-\infty}^z \exp \left[-\frac{1}{2} \int_0^z \left(\frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{d\rho_0}{dz} + \frac{g\rho_0}{p_0 \gamma} - 4jk \cos \tau \right) dz \right] \cdot \left[\frac{d}{dz} \ln \sqrt{Y_{ac} \cos \tau} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{d\rho_0}{dz} + \frac{g\rho_0}{p_0 \gamma} \right) \right] dz. \quad (39)$$

$$\text{D'où: } \bar{\chi}_2^{(0)}(z) = \exp \left[\frac{1}{2} \int_0^z \left(\frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{d\rho_0}{dz} + \frac{g\rho_0}{p_0 \gamma} \right) dz \right].$$

$$\cdot \int_{-\infty}^z \exp \left[-\frac{1}{2} \int_0^z \left(\frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{d\rho_0}{dz} + \frac{g\rho_0}{p_0 \gamma} - 4jk \cos \tau \right) dz \right] \cdot \left[\frac{d}{dz} \ln \sqrt{Y_{ac} \cos \tau} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{d\rho_0}{dz} + \frac{g\rho_0}{p_0 \gamma} \right) \right] dz. \quad (40)$$

A partir de $\bar{\chi}_2^{(0)}$ que l'on introduit dans (40), on peut calculer $\chi^*_1^{(1)}$ et ainsi de suite. Nous n'entrerons pas ici dans le détail des calculs. Nous nous contenterons de mentionner l'influence du terme de (38) qui fausse l'analogie avec les ondes électriques.

5. La méthode de Schelkunoff dans le cas de l'incidence normale

Changeons maintenant (cf. [7], [8], [9]) le sens de notre système de coordonnées et choisissons z négatif vers le haut. Nous supposons que l'origine est au-dessus de la couche considérée.

De même que dans [7] et [8], nous allons étudier la propagation d'une onde venant du bas c'est-à-dire de grandes valeurs positives de z et traversant la couche de $z = h$ à $z = 0$. Nous avions supposé dans [7] et [8] que l'onde pour z négatif, c'est-à-dire au-dessus de la couche, se propageait vers le haut dans un milieu homogène sans réflexion. Dans le cas des ondes acoustiques, nous supposons que pour $z = 0$, il y a une onde qui sort de la couche et une onde réfléchie correspondante dont le facteur de réflexion complexe est r .

6. La propagation dans la couche

Dans le cas de l'incidence normale, les équations (14), (15) et (16) se réduisent à:

$$-\frac{d\bar{p}}{dz} = \frac{g\rho_0(z)}{p_0\gamma} \cdot \bar{p} + j\omega\rho_0 v, \quad (41)$$

$$-\frac{dv}{dz} = \frac{j\omega}{p_0\gamma} \cdot \bar{p} + \frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{d\rho_0}{dz} \cdot v \quad (42)$$

nous écrivons, d'après SCHELKUNOFF [6]:

$$\rho_0(z) = \rho_{00} + \bar{\rho}_0(z), \quad (43)$$

$$\frac{1}{p_0\gamma}(z) = \left(\frac{1}{p_0\gamma} \right)_0 + \left[\frac{1}{p_0\gamma}(z) \right] \quad (44)$$

où $\frac{1}{p_0\gamma}(z)$ représente $\frac{1}{p_0\gamma}$ en fonction de z . Nous sé-

parons donc les grandeurs ρ_0 et $\frac{1}{p_0\gamma}$ en deux parties:

a) une partie constante correspondant à la valeur pour $z = 0$;

b) une partie variable supplémentaire.

Pour plus de clarté, mettons le système (41) et (42) sous la forme:

$$-\frac{d\bar{p}}{dz} = j\omega\rho_{00}v + \left| j\omega\rho_0v + \frac{g(\rho_{00} + \bar{\rho}_0)}{p_0\gamma(z)} \cdot \bar{p} \right| \quad (45)$$

$$-\frac{dv}{dz} = j\omega \left(\frac{1}{p_0\gamma} \right)_0 \bar{p} + \left| j\omega \left[\frac{1}{p_0\gamma}(z) \right] \bar{p} + \frac{1}{\rho_{00} + \bar{\rho}_0} \cdot \frac{d(\rho_{00} + \bar{\rho}_0)}{dz} \cdot v \right| \quad (46)$$

Pour plus de commodité, posons:

$$\frac{g(\rho_{00} + \bar{\rho}_0)}{p_0\gamma(z)} = m(z), \quad (47)$$

$$\frac{1}{\rho_{00} + \bar{\rho}_0} \cdot \frac{d(\rho_{00} + \bar{\rho}_0)}{dz} = n(z), \quad (48)$$

$$\omega \sqrt{\frac{\rho_{00}}{(p_0\gamma)_0}} = k_0, \quad (49)$$

$$\sqrt{\rho_{00}(p_0\gamma)_0} = K_0. \quad (50)$$

Considérons comme SCHELKUNOFF, la partie du système (45), (46) à gauche du trait vertical comme un système homogène, et la partie à droite comme le terme perturbateur de l'homogénéité. Nous avons pour le système homogène, la solution connue de l'équation des télégraphistes dans le cas d'un câble homogène. Si nous résolvons le système non homogène avec les termes de perturbation en faisant varier les constantes, nous obtenons pour $\bar{p}(z)$ et $v(z)$ le système suivant d'équations intégrales:

$$\begin{aligned} \bar{p}(z) = & [\bar{p}(z)]_0 - j\omega \int_0^z v(\zeta) \bar{p}_0(\zeta) \cos k_0(z-\zeta) d\zeta - \\ & - \omega K_0 \int_0^z \bar{p}(\zeta) \left[\frac{1}{p_0\gamma}(\zeta) \right] \sin k_0(z-\zeta) d\zeta + \\ & + jK_0 \int_0^z v(\zeta) n(\zeta) \sin k_0(z-\zeta) d\zeta - \\ & - \int_0^z p(\zeta) m(\zeta) \cos k_0(z-\zeta) d\zeta; \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} v(z) = & [v(z)]_0 - \frac{\omega}{K_0} \int_0^z v(\zeta) \bar{p}_0(\zeta) \sin k_0(z-\zeta) d\zeta - \\ & - j\omega \int_0^z \bar{p}(\zeta) \left[\frac{1}{p_0\gamma}(\zeta) \right] \cos k_0(z-\zeta) d\zeta - \\ & - \int_0^z v(\zeta) n(\zeta) \cos k_0(z-\zeta) d\zeta + \\ & + \frac{j}{K_0} \int_0^z \bar{p}(\zeta) m(\zeta) \sin k_0(z-\zeta) d\zeta \end{aligned} \quad (52)$$

où $[\bar{p}(z)]_0$ et $[v(z)]_0$ sont, comme nous l'avons déjà dit, les solutions du système homogène. Posons:

$$[\bar{p}(z)]_0 = e^{jk_0z} + r_0 e^{-jk_0z}, \quad (53)$$

$$[v(z)]_0 = -\frac{1}{K_0} e^{jk_0z} + \frac{r_0}{K_0} e^{-jk_0z} \quad (54)$$

où r_0 est le facteur de réflexion, c'est-à-dire le rapport complexe de l'onde réfléchie à l'onde transmise au point $z = 0$.

7. La transformation du facteur de réflexion par la couche

Si, au bord supérieur de la couche ($z = 0$), il existe un certain facteur de réflexion r_0 et que d'après (55), (56) on ait un facteur de réflexion r_h au bord

inférieur de la couche, la formule $r_h = f(r_0, \rho_0, \frac{1}{p_0 \gamma})$ représente la transformation du facteur de réflexion par la couche. Posons $r_0 = 0$, nous obtenons le facteur de réflexion dû à la couche seule. Comme, dans le cas considéré, l'onde incidente se propage dans la direction $-z$ et l'onde réfléchie dans la direction $+z$, nous obtenons pour r_h

$$r_h = \frac{\bar{p}(h) + K(h)v(h)}{\bar{p}(h) - K(h)v(h)}, \quad (55)$$

où

$$K(h) = \sqrt{\rho_0(h)p_0(h)\gamma} \quad (56)$$

qui est l'impédance caractéristique pour $z = h$.

Comme notre expression est assez longue, nous désignons le numérateur par M , le dénominateur par N et nous obtenons:

$$r(h) = M/N. \quad (57)$$

Nous devons résoudre maintenant les équations intégrales (51) et (52), nous nous contenterons de la première approximation et nous poserons simplement pour les termes $\bar{p}(z)$ et $v(z)$ sous le signe somme:

$$[\bar{p}(z)]_0 \text{ et } [v(z)]_0.$$

Nous obtenons après avoir groupé les termes analogues:

$$M = e^{jk_0 h} \left[1 - \frac{K(h)}{K_0} \right] + \\ + \int_0^h e^{jk_0 \zeta} \left\{ \cos k_0(h - \zeta) \left[\frac{j\omega \bar{\rho}_0(\zeta)}{K_0} + j\omega \left(\frac{1}{p_0 \gamma} \right) K(h) + n(\zeta) \frac{K(h)}{K_0} \right] + \right. \\ \left. + j \sin k_0(h - \zeta) \left[K_0 j \omega \left(\frac{1}{p_0 \gamma} \right) - n(\zeta) - j\omega \bar{\rho}_0(\zeta) \frac{K(h)}{K_0^2} + \frac{K(h)}{K_0} \cdot m(\zeta) \right] - \right. \\ \left. - \cos k_0(h - \zeta) m(\zeta) \right\} d\zeta +$$

$$+ r_0 \left\{ e^{-jk_0 h} \left[1 + \frac{K(h)}{K_0} \right] + \right. \\ \left. + \int_0^h e^{-jk_0 \zeta} \left\{ \cos k_0(h - \zeta) \left[-\frac{j\omega \bar{\rho}_0(\zeta)}{K_0} + j\omega \left(\frac{1}{p_0 \gamma} \right) K(h) - n(\zeta) \frac{K(h)}{K_0} \right] + \right. \right. \\ \left. \left. + j \sin k_0(h - \zeta) \left[K_0 j \omega \left(\frac{1}{p_0 \gamma} \right) + n(\zeta) + j\omega \bar{\rho}_0(\zeta) \frac{K(h)}{K_0^2} + \frac{K(h)}{K_0} \cdot m(\zeta) \right] - \cos k_0(h + \zeta) m(\zeta) \right\} d\zeta \right\}; \quad (58)$$

$$N = e^{jk_0 h} \left[1 + \frac{K(h)}{K_0} \right] + \\ + \int_0^h e^{jk_0 \zeta} \left\{ \cos k_0(h - \zeta) \left[\frac{j\omega \bar{\rho}_0(\zeta)}{K_0} - j\omega \left(\frac{1}{p_0 \gamma} \right) K(h) - n(\zeta) \frac{K(h)}{K_0} \right] + \right. \\ \left. + j \sin k_0(h - \zeta) \left[K_0 j \omega \left(\frac{1}{p_0 \gamma} \right) - n(\zeta) + j\omega \bar{\rho}_0(\zeta) \frac{K(h)}{K_0^2} - \frac{K(h)}{K_0} \cdot m(\zeta) \right] - \right. \\ \left. - \cos k_0(h + \zeta) m(\zeta) \right\} d\zeta + \\ + r_0 \left\{ e^{-jk_0 h} \left[1 - \frac{K(h)}{K_0} \right] + \right. \\ \left. + \int_0^h e^{-jk_0 \zeta} \left\{ \cos k_0(h - \zeta) \left[-\frac{j\omega \bar{\rho}_0(\zeta)}{K_0} - j\omega \left(\frac{1}{p_0 \gamma} \right) K(h) + n(\zeta) \frac{K(h)}{K_0} \right] + \right. \right. \\ \left. \left. + j \sin k_0(h - \zeta) \left[K_0 j \omega \left(\frac{1}{p_0 \gamma} \right) + n(\zeta) - j\omega \bar{\rho}_0(\zeta) \frac{K(h)}{K_0^2} - \frac{K(h)}{K_0} \cdot m(\zeta) \right] - \cos k_0(h + \zeta) m(\zeta) \right\} d\zeta \right\}. \quad (59)$$

La discussion de ces formules est relativement simple si l'on se souvient de celle qui a été faite dans le cas d'ondes électriques dans une atmosphère où ϵ varie seul [8].

Naturellement, après substitution de $\bar{\epsilon}(\zeta)$ par $\left[\frac{\bar{I}}{P_0 Y}(\zeta) \right]$, ces deux dernières formules renferment tous les termes que nous avions auparavant. A cela s'ajoute un terme analogue avec $\bar{\rho}_0(\zeta)$ qui n'apparaissait pas parce que nous avions supposé la perméabilité μ constante. D'autre part, nous avons une série de termes qui perturbent l'analogie entre les ondes électriques et les ondes acoustiques dans un milieu stratifié. Si nous supprimons ces derniers, nous obtenons, après avoir remplacé les grandeurs acoustiques par les grandeurs électriques correspondantes, la propagation d'ondes électriques dans une couche où μ et ϵ varient.

Nous obtenons directement l'influence des termes $m(\zeta)$ et $n(\zeta)$ qui sont négligés dans la plupart des travaux.

Comme il ressort de (58), (59) le facteur de réflexion a la forme:

$$r(h) = \frac{A + r_0 B}{C + r_0 D}. \quad (60)$$

Ce qui est nécessaire physiquement; si nous posons $r=0$ nous obtenons la réflexion due à la couche seule.

Nous avons vu plus haut, dans la méthode de BREMMER, l'influence des termes qui troubent l'analogie avec le cas des ondes électriques; dans le cas de la méthode de SCHELKUNOFF les grandeurs additives m et n qui reproduisent cette influence se présentent dans les intégrales.

A part cela, la discussion des formules (58) et (59) n'est pas difficile mais ennuyeuse. Elle se fait d'une manière tout à fait analogue à celle qui est exposée en [9] et en [10]. Elle est seulement un peu étendue. Pour éviter au lecteur d'avoir à se reporter à ces références, nous en donnerons ici les lignes principales.

On reconnaît aussitôt qu'il existe un cas limite.

Quand $\bar{\rho}_0(\zeta)$ et $\left[\frac{\bar{I}}{P_0 Y}(\zeta) \right]$ sont identiquement nuls entre $z=0$ et $z=h$ et quand pour $z=h$ la résistance caractéristique saute brusquement de K_0 à $K(h)$, quand en outre $r_0=0$, il résulte alors de (59) et (58), étant donné que toutes les intégrales s'annulent

$$r_h = \frac{K_0 - K(h)}{K_0 + K(h)} \quad (61)$$

c'est-à-dire le coefficient de réflexion de la transition brusquement discontinue.

En outre, nous voyons dans les grandeurs m et n directement l'influence des membres qui troubent l'analogie avec le cas électrique.

Si nous désignons les parties des formules (58) et (59) se trouvant entre parenthèses par K nous avons alors des intégrales de la forme:

$$\int_0^h e^{jk_0 \zeta} \left\{ \begin{array}{l} \cos k_0(h \mp \zeta) \\ \sin k_0(h - \zeta) \end{array} \right\} K d\zeta$$

qui peut se séparer en intégrales:

$$\int_0^h K \cdot e^{jk_0 \zeta} \cdot e^{\pm jk_0(h \mp \zeta)} d\zeta.$$

Selon le signe $k_0 \zeta$ dans l'exposant peut s'annuler ou se doubler:

Il reste par exemple:

$$\frac{1}{2} \int_0^h \frac{j\omega \bar{\rho}_0(\zeta)}{K_0} d\zeta$$

$$\text{ou } \frac{1}{2} \int_0^h e^{2jk_0 \zeta} \cdot \frac{j\omega \bar{\rho}_0(\zeta)}{K_0} d\zeta.$$

La première expression représente la surface sous la courbe $\bar{\rho}_0(\zeta) = f(\zeta)$ de la couche, la deuxième expression représente la contribution des éléments de cette surface à l'influence du chemin parcouru par l'onde. On verra ainsi directement dans chaque cas se présentant en pratique, comment le facteur de réflexion s'obtient à partir de l'hétérogénéité existante.

(Reçu le 17 Janvier, 1952.)

Bibliographie

- [1] ECKART, G. et LIENARD, P., Analogie incomplète des impédances caractéristiques électrique et acoustique et conséquences relatives à l'écho dans les milieux stratifiés continus. *Acustica* **2** [1952], 157—161.
- [2] BREMMER, H., Some remarks on the ionospheric double refraction, Part I. *Philips Res. Rep.* **4** [1949], 1—19.
- [3] BREMMER, H., Some remarks on the ionospheric double refraction, Part II. *Philips Res. Rep.* **4** [1949], 189—205.
- [4] BREMMER, H., *Physica* **15** [1949], 593—608.
- [5] RYDBECK, O. E. H., Reports from Research Laboratory of Electronics, Chalmers Tekniska Högskola, Göteborg 1949, No 7.
- [6] SCHELKUNOFF, S. A., *Quart. J. appl. Math.* **3** [1946], 348—355.
- [7] ECKART, G., *C. R. Acad. Sci., Paris* **233** [1951], 1294—1296.
- [8] ECKART, G., Rapport Office National d'Etudes et de Recherches Aéronautiques No 1029 P — Note Technique No 13.
- [9] ECKART, G., Über die Reflexion ebener elektromagnetischer Wellen in schwach inhomogenen Schichten. *Arch. elektr. Übertragung* **5** [1951], 555—560.
- [10] ECKART, G., *J. Phys. Radium*, sous presse.
- [11] ECKART, G., *C.R. Acad. Sci., Paris* **234** [1952], 309—311.

DIE AKUSTISCHE STRAHLUNG DER RECHTECKIGEN KOLBENMEMBRAN

Von HEINRICH STENZEL

Fernmeldetechnisches Zentralamt Darmstadt

Zusammenfassung

Es werden allgemeine Formeln abgeleitet, die die Berechnung des Schallfeldes unmittelbar vor einer rechteckigen Membran gestatten. Das sich anschließende Schallfeld der Umgebung wird durch graphische Integration bestimmt und durch zahlreiche Abbildungen erläutert. Dann werden allgemeine Formeln zur Berechnung der Strahlungsimpedanz entwickelt und die beiden Komponenten für verschiedene Seitenverhältnisse des Rechtecks ($a:b = 1:1$, $a:b = 2:1$, $a:b = 5:1$, $a:b = 10:1$) berechnet und graphisch dargestellt.

Summary

General formulae are obtained for calculating the sound field immediately in front of a vibrating rectangular membrane. The vicinal sound field is calculated by graphical integration and illustrated by many diagrams. Then general formulae for the radiation impedance are derived; and finally its two components are calculated and graphically constructed for different ratios of the sides of the rectangle ($a:b = 1:1$, $a:b = 2:1$, $a:b = 5:1$, $a:b = 10:1$).

Sommaire

On a établi des formules générales qui permettent de calculer le champ sonore juste devant une membrane rectangulaire. Le champ sonore adjacent est déterminé par intégration graphique et son allure est montrée par de nombreuses figures. On établit ensuite des formules générales pour calculer l'impédance de rayonnement, et les deux composantes relatives à différents rapports des côtés du rectangle ($a:b = 1:1$, $a:b = 2:1$, $a:b = 5:1$, $a:b = 10:1$) ont été calculées et représentées graphiquement.

Allgemeines

Während die Untersuchung der akustischen Strahlung einer kreisförmigen Kolbenmembran schon vor langer Zeit durch RAYLEIGH in seinem klassischen Buche [1] in Angriff genommen und durch zahlreiche Arbeiten anderer Verfasser bis in die neueste Zeit [2] wesentlich gefördert wurde, ist die akustische Strahlung der rechteckigen Kolbenmembran bisher wenig behandelt. Zuerst hat RIEGGER [3] allgemeine Betrachtungen über die rechteckige Kolbenmembran angestellt und in zwei speziellen Fällen (Seitenverhältnis $a:b = 1:1$ und $a:b = 1:7$) die beiden Komponenten der Strahlungsimpedanz in Kurvenform angegeben. Doch befriedigt das Ergebnis insofern wenig, da die zur Berechnung notwendigen Formeln nicht angegeben sind. Die späteren Arbeiten beschränken sich, abgesehen von der Berechnung des Fernfeldes [4], auf die Untersuchung der einen Komponente der Strahlungsimpedanz [5], [6] (Strahlungswiderstand), die aus der Formel für das Fernfeld abgeleitet wird.

Das Ziel des Folgenden soll es sein, eine einigermaßen vollständige Übersicht über die Strahlung

der rechteckigen Kolbenmembran zu geben. Dazu sollen bei verschiedenem Seitenverhältnis des Rechtecks einmal die entsprechenden Schallfelder durch die Kurven konstanter Amplitude und zweitens die entsprechende Strahlungsimpedanz durch die beiden Komponenten graphisch dargestellt werden.

I. DAS SCHALLFELD IN DER UMGEBUNG DER MEMBRAN

1. Die Berechnung der Schalldruckkomponenten unmittelbar vor der Membran

Wir legen eine in starrer Wand schwingende rechteckige Kolbenmembran A B C D (Abb. 1) zugrunde, deren Schnelle durch $w^* = w_0 \cdot e^{i\omega t}$ gegeben ist. Dabei bedeutet w_0 die (konstante) Geschwindigkeitsamplitude der Membran. Der von der strahlenden Fläche F in einem beliebigen Aufpunkt M erzeugte Schalldruck setzt sich nach RAYLEIGH aus den einzelnen, von den Flächenelementen dF herührenden, Anteilen zusammen. Wir drücken dies durch die Beziehung aus:

$$\begin{aligned} p^* &= c \sigma w_0 \cdot e^{i\omega t} (p_a + i p_m) \\ &= c \sigma w_0 \cdot e^{i(\omega t + \chi)} \cdot p \end{aligned} \quad (1)$$

mit

$$p_a + i p_m = \frac{i}{\lambda} \int_F \frac{e^{-ikr}}{r} dF, \quad (2)$$

$$p = \sqrt{p_a^2 + p_m^2}, \quad \operatorname{tg} \chi = p_m/p_a.$$

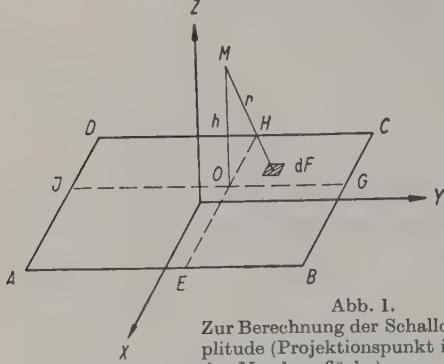


Abb. 1.

Zur Berechnung der Schalldruckamplitude (Projektionspunkt innerhalb der Membranfläche).

Die (dimensionslosen) Größen

$$p_a = \frac{1}{\lambda} \int_F \frac{\sin kr}{r} dF, \quad p_m = \frac{1}{\lambda} \int_F \frac{\cos kr}{r} dF$$

bezeichnen wir als die (relativen) Schalldruckkomponenten und p als die (relative) Schalldruckamplitude.

Ferner bedeuten:

c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles,

σ die Mediumdichte,

$k = 2\pi/\lambda$ die zur Wellenlänge λ gehörende Wellenzahl,

$e^{i\omega t}$ den Zeitfaktor der fortschreitenden Welle, r den Abstand des Aufpunktes vom Flächen-element,

J_0, J_1 die Besselsche Funktion nullter und erster Ordnung,

Y_0, Y_1 die Neumannsche Funktion nullter und erster Ordnung,

H_0, H_1 die Struvesche Funktion nullter und erster Ordnung.

Liegt der Projektionspunkt O des Aufpunktes M innerhalb der Membranfläche (Abb. 1), so zerlegen wir die Fläche in vier Rechtecke, so daß $F = OHDI + OIAE + OEBG + OGCH$ ist. Liegt der Projektionspunkt O' des Aufpunktes M' außerhalb der Membran (Abb. 2), so zerlegen wir die Fläche F in vier Rechtecke, so daß $F = O'H'D'I' + O'I'A'E' - O'E'B'G' - O'G'C'H'$ ist. Der allgemeine Fall setzt sich daher aus den besonderen Fällen zusammen, in denen der Aufpunkt senkrecht über einer Ecke des strahlenden Rechtecks liegt. Wir wollen nun zunächst den Schall-

druck unmittelbar vor der rechteckigen Kolbenmembran untersuchen. Dazu genügt es, sich auf den Fall zu beschränken, wo der Aufpunkt mit einer Ecke der Membran zusammenfällt.

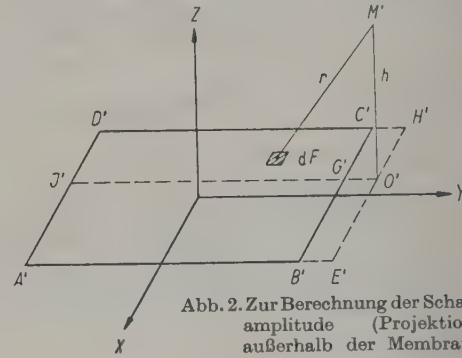


Abb. 2. Zur Berechnung der Schalldruckamplitude (Projektionspunkt außerhalb der Membranfläche).

Die relativen Schalldruckkomponenten p_a und p_m im Eckpunkt des strahlenden Rechtecks mit den Seiten x, y sind nach Gl. (2) bestimmt durch:

$$p_a + i p_m = \varphi(x, y) = \frac{i}{\lambda} \int_0^x \int_0^y \frac{e^{-ik\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} d\xi d\eta. \quad (3)$$

Setzen wir für den Zähler des Integranden die Reihenentwicklung ein, so folgt:

$$\varphi(x, y) = \frac{k}{\lambda} \varphi_0 - \frac{k^3}{\lambda \cdot 3!} \varphi_2 + \frac{k^5}{\lambda \cdot 5!} \varphi_4 - \dots + \\ + i \left(\frac{1}{\lambda} \varphi_{-1} - \frac{k^2}{\lambda \cdot 2!} \varphi_1 + \frac{k^4}{\lambda \cdot 4!} \varphi_3 - \dots \right) \quad (4)$$

mit

$$\varphi_m = \int_0^x \int_0^y (\xi^2 + \eta^2)^{m/2} d\xi d\eta. \quad (m = -1, 0, 1, 2, \dots) \quad (5)$$

Im Fall $m = 2n$, d. h. für den reellen Teil von $\varphi(x, y)$, entwickeln wir den Integranden in Gl. (5) nach dem Binom. Dann können wir die Integration ausführen und bekommen:

$$\varphi_{2n}(x, y) =$$

$$xy \left(\frac{x^{2n}}{1 \cdot (2n+1)} + \frac{\binom{n}{1} x^{2n-2} y^2}{3 \cdot (2n-1)} + \dots + \frac{\binom{n}{n} y^{2n}}{(2n+1) \cdot 1} \right). \quad (6)$$

Im Fall $m = 2n-1$, d. h. für den imaginären Teil von $\varphi(x, y)$, ist es zweckmäßig, die Integration in Gl. (5) getrennt über die beiden Dreiecke ADC und ABC auszuführen. Wir finden dann (Abb. 3):

$$\varphi_{2n-1}(x, y) =$$

$$\int_0^y \int_0^{\frac{x}{y}\eta} \frac{\frac{x}{y}\eta}{(\xi^2 + \eta^2)^{n-1/2}} d\xi d\eta + \int_0^x \int_0^{\frac{y}{x}\xi} \frac{\frac{y}{x}\xi}{(\xi^2 + \eta^2)^{n-1/2}} d\xi d\eta. \quad (7)$$

Zur Auswertung von Gl. (7) benutzen wir die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 2n \int_0^x (\xi^2 + \eta^2)^{n-1/2} d\xi &= x(x^2 + y^2)^{n-1/2} + (2n-1) \eta^2 \int_0^x (\xi^2 + \eta^2)^{n-3/2} d\xi \\
 (2n-2) \int_0^x (\xi^2 + \eta^2)^{n-3/2} d\xi &= x(x^2 + y^2)^{n-3/2} + (2n-3) \eta^2 \int_0^x (\xi^2 + \eta^2)^{n-5/2} d\xi \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 4 \int_0^x (\xi^2 + \eta^2)^{3/2} d\xi &= x(x^2 + y^2)^{3/2} + 3 \eta^2 \int_0^x (\xi^2 + \eta^2)^{1/2} d\xi \\
 2 \int_0^x (\xi^2 + \eta^2)^{1/2} d\xi &= x(x^2 + y^2)^{1/2} + \eta^2 \int_0^x (\xi^2 + \eta^2)^{-1/2} d\xi \\
 \int_0^x (\xi^2 + \eta^2)^{-1/2} d\xi &= \log\left(\frac{x + \sqrt{x^2 + \eta^2}}{\eta}\right)
 \end{aligned}$$

Indem wir die erste, zweite, dritte usw. dieser Gleichungen mit $1, \frac{2n-1}{2n-2} \eta^2, \frac{(2n-1)(2n-3)}{(2n-2)(2n-4)} \eta^4$ usw. multiplizieren und addieren, erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 2n \int_0^x (\xi^2 + \eta^2)^{n-1/2} d\xi &= x \left[(x^2 + \eta^2)^{n-1/2} + \frac{(2n-1) \eta^2}{2n-2} (x^2 + \eta^2)^{n-3/2} + \dots \right. \\
 &\quad \left. \dots + \frac{(2n-1)(2n-3)\dots5\cdot3}{(2n-2)(2n-4)\dots4\cdot2} \eta^{2n-2} (x^2 + \eta^2)^{1/2} \right] + \frac{(2n-1)(2n-3)\dots5\cdot3}{(2n-2)(2n-4)\dots4\cdot2} \eta^{2n} \log\left(\frac{x + \sqrt{x^2 + \eta^2}}{\eta}\right). \quad (8)
 \end{aligned}$$

Dann folgt:

$$\begin{aligned}
 2n \int_0^y d\eta \int_0^{\eta} (\xi^2 + \eta^2)^{n-1/2} d\xi &= \frac{x \cdot y}{2n+1} \left[(x^2 + y^2)^{n-1/2} + \frac{2n-1}{2n-2} (x^2 + y^2)^{n-3/2} \cdot y^2 + \dots \right. \\
 &\quad \left. \dots + \frac{(2n-1)(2n-3)\dots5\cdot3}{(2n-2)(2n-4)\dots4\cdot2} (x^2 + y^2)^{1/2} y^{2n-2} \right] + \frac{(2n-1)(2n-3)\dots5\cdot3}{(2n-2)(2n-4)\dots4\cdot2} \frac{y^{2n+1}}{2n+1} \log\left(\frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{y}\right). \quad (9)
 \end{aligned}$$

Der zweite Summand in Gl. (7) ergibt sich aus Gl. (9) durch Vertauschung von x mit y . So erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 \varphi_{2n-1}(x, y) &= \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot \left[x^{2n+1} \log\left(\frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x}\right) + y^{2n+1} \log\left(\frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{y}\right) \right] + \\
 &\quad + \frac{x \cdot y (x^2 + y^2)^{1/2}}{2n(2n+1)} \left\{ (x^2 + y^2)^{n-1} \cdot 2 + \frac{2n-1}{2n-2} (x^2 + y^2)^{n-2} [x^2 + y^2] + \frac{(2n-1)(2n-3)}{(2n-2)(2n-4)} (x^2 + y^2)^{n-3} [x^4 + y^4] + \dots \right. \\
 &\quad \left. \dots + \frac{(2n-1)(2n-3)\dots3}{(2n-2)(2n-4)\dots2} [x^{2n-2} + y^{2n-2}] \right\} (n = 1, 2, \dots) \quad (10)
 \end{aligned}$$

und $\varphi_{-1}(x, y) = x \log\left(\frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x}\right) + y \log\left(\frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{y}\right)$.

Mit den Abkürzungen

$$u = ka, \quad v = kb, \quad w = k \sqrt{a^2 + b^2} \quad (11)$$

bekommen wir dann aus Gl. (3) und Gl. (4) für die Schalldruckkomponenten p_a und p_m im Eckpunkt eines strahlenden Rechtecks mit den Seiten a und b die Formeln:

$$2\pi p_a = uv \left\{ 1 - \frac{1}{3!} \left[\frac{u^2}{3} + \frac{v^2}{3} \right] + \frac{1}{5!} \left[\frac{u^4}{1 \cdot 5} + \frac{\binom{2}{1} u^2 v^2}{3 \cdot 3} + \frac{\binom{2}{2} v^4}{5 \cdot 1} \right] - \frac{1}{7!} \left[\frac{u^6}{1 \cdot 7} + \frac{\binom{3}{1} u^4 v^2}{3 \cdot 5} + \frac{\binom{3}{2} u^2 v^4}{5 \cdot 3} + \frac{\binom{3}{3} v^6}{7 \cdot 1} \right] + \dots \right\}, \quad (12)$$

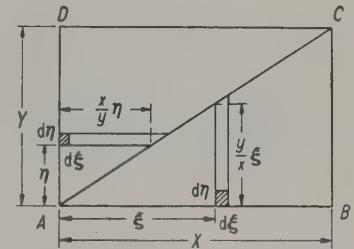


Abb. 3.

Zur Berechnung des Integrals über die Fläche des Rechtecks.

$$2\pi p_m \cdot \log\left(\frac{u+w}{v}\right) \left\{ v - \frac{1}{2} \cdot \frac{v^3}{3!} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{v^5}{5!} - \dots \right\} + \log\left(\frac{v+w}{u}\right) \left\{ u - \frac{1}{2} \cdot \frac{u^3}{3!} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{u^5}{5!} - \dots \right\} - \quad (13)$$

$$- uvw \left\{ \frac{1}{3!} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5!} \left[u^2 + v^2 + \frac{2}{3} 2w^2 \right] + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7!} \left[u^4 + v^4 + \frac{2}{3} w^2(u^2 + v^2) + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot 2w^4 \right] - \right.$$

$$\left. - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{1}{9!} \left[u^6 + v^6 + \frac{2}{3} w^2(u^4 + v^4) + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} w^4(u^2 + v^2) + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} \cdot 2w^6 \right] + \dots \right\} .$$

Aus der Reihenentwicklung der Besselschen Funktion $J_0(x)$ ergibt sich:

$$x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3!} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5!} - \dots = \int_0^x J_0(x) dx. \quad (14)$$

Damit können wir die erste Zeile in Gl. (13) durch

$$\log\left(\frac{u+w}{v}\right) \int_0^v J_0(x) dx + \log\left(\frac{v+w}{u}\right) \int_0^u J_0(x) dx$$

ersetzen und für die Berechnung die für $u=1, 2, \dots, 24$ tabellarisch berechnete Funktion $\int_0^u J_0(x) dx$ be-

nutzen [7]. Die für beliebiges u, v und $w = \sqrt{u^2 + v^2}$ absolut konvergenten Reihen (12) und (13) sind dann zur Berechnung von p_a und p_m für kleinere Werte von ka und kb geeignet. In der Tabelle I sind die entsprechenden Werte für $ka \leq 5, kb \leq 5$ zusammengestellt. Dabei waren in den Reihen (12) und (13) im Höchstfalle ($ka=5, kb=5$) zehn Glieder zu berücksichtigen, um p_a und p_m auf vier Stellen hinter dem Komma zu bestimmen.

Tabelle I
 p_a

| kb | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 1 | +0,1429 | +0,2405 | +0,2749 | +0,2588 | +0,2256 |
| 2 | +0,2405 | +0,4012 | +0,4483 | +0,4112 | +0,3423 |
| 3 | +0,2749 | +0,4483 | +0,4798 | +0,4061 | +0,3136 |
| 4 | +0,2588 | +0,4112 | +0,4061 | +0,3029 | +0,1956 |
| 5 | +0,2256 | +0,3423 | +0,3136 | +0,1956 | +0,0901 |

p_m

| ka | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 1 | +0,2237 | +0,2253 | +0,1759 | +0,1357 | +0,1292 |
| 2 | +0,2253 | +0,1903 | +0,0898 | +0,0177 | +0,0119 |
| 3 | +0,1759 | +0,0898 | -0,0509 | -0,1375 | -0,1311 |
| 4 | +0,1357 | +0,0177 | -0,1375 | -0,2177 | -0,1830 |
| 5 | +0,1292 | +0,0119 | -0,1311 | -0,1830 | -0,1356 |

Für größere Werte ist eine andere Entwicklung (nach fallenden Potenzen von w) bequemer, die wir nun ableiten wollen. Führen wir in Gl. (3) Polarkoordinaten ein:

$\xi = \rho \cos \psi, \eta = \rho \sin \psi, dF = d\xi d\eta = \rho d\rho d\psi$, so ergibt sich an Hand der Abb. 4 aus Gl. (3):

$$p_a + ip_m = \frac{i}{\lambda} \int_0^{\psi_1} d\psi \int_0^{a/\cos \psi} e^{-ik\rho} d\rho + \frac{i}{\lambda} \int_0^{\psi_2} d\psi \int_0^{b/\cos \psi} e^{-ik\rho} d\rho, \quad (15)$$

$$p_a + ip_m = \frac{1}{2\pi} \left[\psi_1 + \psi_2 - \int_0^{\psi_1} e^{-ika/\cos \psi} d\psi - \int_0^{\psi_2} e^{ikb/\cos \psi} d\psi \right].$$

Wir setzen nach Gl. (11) $ka=u$. Dann ist:

$$\int_0^{\psi_1} e^{-iu/\cos \psi} d\psi = \int_0^{\pi/2} e^{-iu/\cos \psi} d\psi - \int_{\psi_1}^{\pi/2} e^{-iu/\cos \psi} d\psi. \quad (16)$$

Wir führen eine neue Variable $t=1/\cos \psi$ ein und setzen:

$$f(u) = \int_0^{\pi/2} e^{-iu/\cos \psi} d\psi = \int_1^{\infty} \frac{e^{-iu t}}{t\sqrt{t^2-1}} dt.$$

Dann ist [8]:

$$\frac{df}{du} = -i \int_1^{\infty} \frac{e^{-iu t}}{\sqrt{t^2-1}} dt = -\frac{\pi}{2} [J_0(u) - i Y_0(u)]$$

und daher

$$f(u) = +\frac{\pi}{2} \left[1 - \int_0^u J_0(x) dx + i \int_0^u Y_0(x) dx \right]. \quad (17)$$

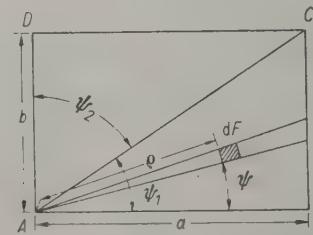


Abb. 4. Zur Einführung von Polarkoordinaten.

Für den zweiten Summanden auf der rechten Seite von Gl. (16) erhalten wir nach Einführung von $t=1/\cos \psi$ durch partielle Integration:

$$\int_{\psi_1}^{\pi/2} e^{-iu/\cos \psi} d\psi = \int_{1/\cos \psi_1}^{\infty} \frac{e^{-iu t}}{t\sqrt{t^2-1}} dt =$$

$$= e^{-iu/\cos \psi_1} \left(\frac{\pi}{2} - \psi_1 \right) - iu \int_{1/\cos \psi_1}^{\infty} e^{-iu t} \arcsin(1/t) dt.$$

Ersetzen wir den $\arcsin(1/t)$ durch seine Potenzreihe und benutzen die neue Variable $\tau = ut$, so folgt wegen $ka/\cos \psi_1 = k\sqrt{a^2 + b^2} = w$:

$$\int_{\psi_1}^{\pi/2} e^{-i u/\cos \psi} d\psi = e^{-iw} \left(\frac{\pi}{2} - \psi_1 \right) - i \left(u \int_w^{\infty} e^{-i u \tau} d\tau + \frac{1}{2} \frac{u^3}{3} \int_w^{\infty} e^{-i u \tau} \tau^3 d\tau + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{u^5}{5} \int_w^{\infty} e^{-i u \tau} \tau^5 d\tau + \dots \right). \quad (18)$$

Die Integrale auf der rechten Seite von Gl. (18) lassen sich durch den Integralsinus $\text{si}(w)$ und den Integralkosinus $\text{ci}(w)$ ausdrücken. Dabei benutzen wir die Beziehungen [9]:

$$\int_w^{\infty} \frac{\sin \tau}{\tau^{2n+1}} d\tau = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\text{si}(w)}{(2n)!} + \frac{\cos w}{w^{2n}} \left[\frac{w}{2n(2n-1)} - \frac{w^3}{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} w^{2n-1}}{(2n)!} \right] + \\ + \frac{\sin w}{w^{2n}} \left[\frac{1}{2n} - \frac{w^2}{2n(2n-1)(2n-2)} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} w^{2n-2}}{(2n)!} \right], \quad (19)$$

$$\int_w^{\infty} \frac{\cos \tau}{\tau^{2n+1}} d\tau = (-1)^{n+1} \frac{\text{ci}(w)}{(2n)!} + \frac{\cos w}{w^{2n}} \left[\frac{1}{2n} - \frac{w^2}{2n(2n-1)(2n-2)} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} w^{2n-2}}{(2n)!} \right] - \\ - \frac{\sin w}{w^{2n}} \left[\frac{w}{2n(2n-1)} - \frac{w^3}{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} w^{2n-2}}{(2n)!} \right]. \quad (20)$$

Fassen wir entsprechende Glieder zusammen, so folgt aus Gl. (17), (18), (19) und (14):

$$\int_0^{\psi_1} \cos(u/\cos \psi) d\psi = \frac{\pi}{2} \left[1 - \int_0^u J_0(x) dx \right] - \left(\frac{\pi}{2} - \psi_1 \right) \cos w + U(u, w) \quad (21)$$

$$\text{mit } U(u, w) = -\text{si}(w) \int_0^u J_0(x) dx + \left(\frac{\cos w}{w} + \frac{\sin w}{w^2} \right) \left[u - \int_0^u J_0(x) dx \right] - \\ - \left(\frac{2! \cos w}{w^3} + \frac{3! \sin w}{w^4} \right) \left[u - \frac{1}{2} \frac{u^3}{3!} - \int_0^u J_0(x) dx \right] + \\ + \left(\frac{4! \cos w}{w^5} + \frac{5! \sin w}{w^6} \right) \left[u - \frac{1}{2} \frac{u^3}{3!} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{u^5}{5!} - \int_0^u J_0(x) dx \right] \text{ usw.} \quad (22)$$

$$\int_0^{\psi_1} \sin(u/\cos \psi) d\psi = -\frac{\pi}{2} \int_0^u Y_0(x) dx - \left(\frac{\pi}{2} - \psi_1 \right) \sin w - V(u, w) \quad (23)$$

$$\text{mit } V(u, w) = -\text{ci}(w) \int_0^u J_0(x) dx + \left(\frac{\cos w}{w^2} - \frac{\sin w}{w} \right) \left[u - \int_0^u J_0(x) dx \right] - \\ - \left(\frac{3! \cos w}{w^4} - \frac{2! \sin w}{w^3} \right) \left[u - \frac{1}{2} \frac{u^3}{3!} - \int_0^u J_0(x) dx \right] + \\ + \left(\frac{5! \cos w}{w^6} - \frac{4! \sin w}{w^5} \right) \left[u - \frac{1}{2} \frac{u^3}{3!} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{u^5}{5!} - \int_0^u J_0(x) dx \right] \text{ usw.} \quad (24)$$

Es läßt sich leicht einsehen, daß die Reihen in Gl. (22) und (24) für beliebiges u und w ($w > u$) absolut konvergent sind. Betrachten wir nämlich für hinreichend großes n das n -te Glied in Gl. (22), so gilt für den ersten Faktor:

$$(2n-2)! \frac{\cos w}{w^{2n-1}} + (2n-1)! \frac{\sin w}{w^{2n}} < \frac{(2n-1)!}{w^{2n}} \cdot 2$$

und für den zweiten Faktor wegen Gl. (14):

$$\begin{aligned} u - \frac{1}{2} \frac{u^3}{3!} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{u^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdots (2n-2)} \frac{u^{2n-1}}{(2n-1)!} - \int_0^u J_0(x) dx \\ < \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n} \cdot \frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!} < \frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!}. \end{aligned}$$

Daher ist das n -te Glied in Gl. (22) absolut kleiner als $2u/2n(2n+1)$ und die Reihe konvergent. Analog folgt die Konvergenz für die Reihe in Gl. (24).

Für die praktische Rechnung ist jedoch meist eine asymptotische Entwicklung einfacher. Diese erhalten wir, indem wir den Integralsinus $\text{si}(w)$ und den Integralkosinus $\text{ci}(w)$ durch die asymptotischen Reihen ersetzen [10]:

$$-\text{si}(w) = \frac{\cos w}{w} + \frac{\sin w}{w^2} - \left(\frac{2! \cos w}{w^3} + \frac{3! \sin w}{w^4} \right) + \left(\frac{4! \cos w}{w^5} + \frac{5! \sin w}{w^6} \right) - \cdots, \quad (25)$$

$$-\text{ci}(w) = \frac{\cos w}{w^2} - \frac{\sin w}{w} - \left(\frac{3! \cos w}{w^4} - \frac{2! \sin w}{w^3} \right) + \left(\frac{5! \cos w}{w^6} - \frac{4! \sin w}{w^5} \right) - \cdots. \quad (26)$$

Dann fallen in Gl. (22) und (24) die Glieder mit dem Faktor $\int_0^u J_0(x) dx$ fort und wir erhalten aus Gl. (15):

$$2\pi p_a = \frac{\pi}{2} \int_0^u J_0(x) dx + \frac{\pi}{2} \int_0^v J_0(x) dx - U^*(u, w) - U^*(v, w) - \frac{\pi}{2} (1 - \cos w), \quad (27)$$

$$2\pi p_m = -\frac{\pi}{2} \int_0^u Y_0(x) dx - \frac{\pi}{2} \int_0^v Y_0(x) dx - V^*(u, w) - V^*(v, w) - \frac{\pi}{2} \sin w \quad (28)$$

$$\text{mit } U^*(u, w) = \left(\frac{\cos w}{w} + \frac{\sin w}{w^2} \right) u - \left(\frac{2! \cos w}{w^3} + \frac{3! \sin w}{w^4} \right) \left[u - \frac{1}{2} \frac{u^3}{3!} \right] + \cdots, \quad (29)$$

$$V^*(u, w) = \left(\frac{\cos w}{w^2} - \frac{\sin w}{w} \right) u - \left(\frac{3! \cos w}{w^4} - \frac{2! \sin w}{w^3} \right) \left[u - \frac{1}{2} \frac{u^3}{3!} \right] + \cdots. \quad (30)$$

Die Berechnung der Integrale in Gl. (27) und (29) erfolgt für $u < 16$ durch die Formeln [11]:

$$\int_0^u J_0(x) dx = \frac{\pi}{2} u \left[J_0(u) H'_0(u) + J_1(u) H_0(u) \right], \quad \int_0^u Y_0(x) dx = \frac{\pi}{2} u \left[Y_0(u) H'_0(u) + Y_1(u) H_0(u) \right] \quad (31) \quad (32)$$

mit Hilfe der tabellierten Funktionen $H_0(u)$ und $H_1(u)$ [12] und der Beziehung [13] $H'_0(u) = 2/\pi - H_1(u)$.

Für $u > 16$ benutzen wir die Annäherungsformeln [14]:

$$H_0(u) = Y_0(u) + \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u^3} \right) + O(u^{-5}), \quad H_1(u) = Y_1(u) + \frac{2}{\pi} \left(1 + \frac{1}{u^2} \right) + O(u^{-4}) \quad (33)$$

und erhalten daraus (mit einem Fehler kleiner als $5 \cdot 10^{-5}$):

$$\int_0^u J_0(x) dx = 1 - \frac{J_0(u)}{u} + \left(1 - \frac{1}{u^2} \right) J_1(u), \quad \int_0^u Y_0(x) dx = -\frac{Y_0(u)}{u} + \left(1 - \frac{1}{u^2} \right) Y_1(u). \quad (34) \quad (35)$$

Die danach berechneten Werte sind in der Tabelle II angegeben.

Tabelle II

| p_a | | | | | p_m | | | | |
|-----------------|---------|---------|---------|---------|-----------------|---------|---------|---------|---------|
| $ka \sqrt{k b}$ | 8 | 10 | 16 | 20 | $ka \sqrt{k b}$ | 8 | 10 | 16 | 20 |
| 8 | +0,3818 | +0,3192 | +0,3456 | +0,3049 | 8 | +0,0902 | -0,0387 | -0,0047 | +0,1025 |
| 10 | +0,3192 | +0,2623 | +0,2949 | +0,2811 | 10 | -0,0387 | -0,1246 | -0,1208 | -0,0018 |
| 16 | +0,3456 | +0,2949 | +0,3072 | +0,2854 | 16 | -0,0047 | -0,1208 | -0,0736 | -0,0124 |
| 20 | +0,3049 | +0,2811 | +0,2854 | +0,2782 | 20 | +0,1025 | -0,0018 | -0,0124 | +0,0952 |

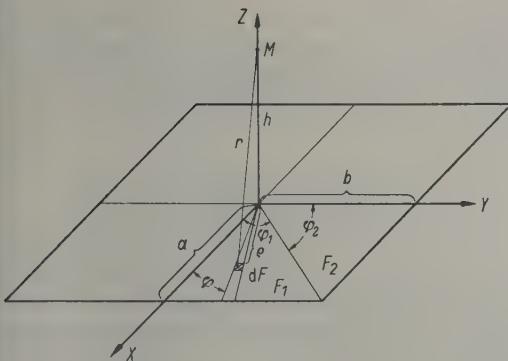


Abb. 5. Zur Berechnung der Schalldruckamplitude für den Aufpunkt auf der Symmetrieachse.

2. Die Darstellung der Schalldruckamplitude auf der Symmetrieachse

Wir zerlegen die Fläche der strahlenden rechteckigen Membran in vier kongruente Rechtecke (Abb. 5), von denen das eine aus den beiden Dreiecken mit den Flächen F_1 und F_2 zusammengesetzt ist. Aus Symmetriegründen ist dann nach Gl. (2) der relative Schalldruck im Aufpunkt M gegeben durch:

$$p_a + i p_m = \frac{4}{\lambda} \int_{F_1 + F_2} \frac{e^{-ikr}}{r} dF. \quad (36)$$

Führen wir Polarkoordinaten ρ, φ ein, so ist

$$dF_1 = \rho d\rho d\varphi = r dr d\varphi$$

und

$$\begin{aligned} \int_{F_1} \frac{e^{-ikr}}{r} dF_1 &= \int_0^{\varphi_1} d\varphi \int_0^{\sqrt{h^2 + a^2/\cos^2 \varphi}} e^{-ikr} dr = \\ &= \frac{\varphi_1}{ik} \left(e^{-ikh} - \int_0^{\varphi_1} e^{-ik\sqrt{h^2 + a^2/\cos^2 \varphi}} d\varphi \right). \end{aligned}$$

Analog folgt:

$$\int_{F_2} \frac{e^{-ikr}}{r} dF_2 = \frac{\varphi_2}{ik} \left(e^{-ikh} - \int_0^{\varphi_2} e^{-ik\sqrt{h^2 + b^2/\cos^2 \varphi}} d\varphi \right).$$

Unter Berücksichtigung von $\varphi_1 + \varphi_2 = \pi/2$ ergibt sich dann aus Gl. (36):

$$\begin{aligned} p_a + i p_m &= e^{-ikh} - \frac{2}{\pi} \int_0^{\varphi_1} e^{-ik\sqrt{h^2 + a^2/\cos^2 \varphi}} d\varphi - \\ &- \frac{2}{\pi} \int_0^{\varphi_2} e^{-ik\sqrt{h^2 + b^2/\cos^2 \varphi}} d\varphi. \quad (37) \end{aligned}$$

Dabei sind φ_1 und φ_2 durch $\operatorname{tg} \varphi_1 = b/a$ und $\operatorname{tg} \varphi_2 = a/b$ bestimmt. Die Integrale in Gl. (37) werten wir graphisch aus, indem wir die Kurven

$$\cos \sqrt{(kh)^2 + (ka)^2/\cos^2 \varphi}, \quad \sin \sqrt{(kh)^2 + (ka)^2/\cos^2 \varphi},$$

$$\cos \sqrt{(kh)^2 + (kb)^2/\cos^2 \varphi} \quad \text{und} \quad \sin \sqrt{(kh)^2 + (kb)^2/\cos^2 \varphi}$$

in Abhängigkeit von φ darstellen und graphisch integrieren. Dann können wir p_a und p_m berechnen und die Amplitude $p = \sqrt{p_a^2 + p_m^2}$ als Funktion von kh darstellen.

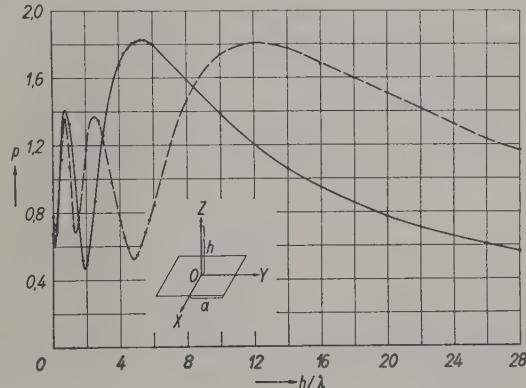


Abb. 6. Schalldruckamplitude auf der Symmetrieachse
 $\text{---} 2a/\lambda = 4; 2b/\lambda = 4,$
 $\text{---} 2a/\lambda = 6; 2b/\lambda = 6,$
 $p = \sqrt{p_a^2 + p_m^2},$
 $p_a + i p_m = e^{-ikh} - \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/4} e^{-ik\sqrt{h^2 + a^2/\cos^2 \varphi}} d\varphi.$

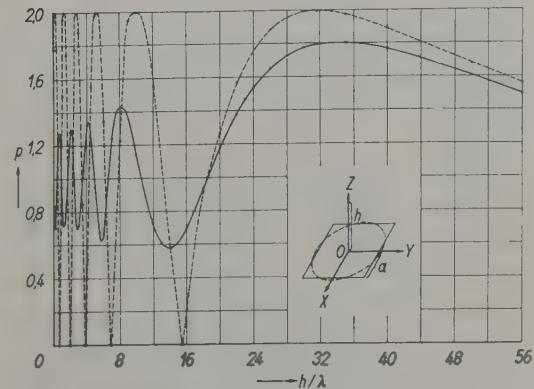


Abb. 7. Schalldruckamplitude auf der Symmetrieachse
 $\text{---} \text{des Quadrats } 2a/\lambda = 10,$
 $\text{---} \text{des flächengleichen Kreises;}$
 $p = \sqrt{p_a^2 + p_m^2},$
 $p_a + i p_m = e^{-ikh} - \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/4} e^{-ik\sqrt{h^2 + a^2/\cos^2 \varphi}} d\varphi.$

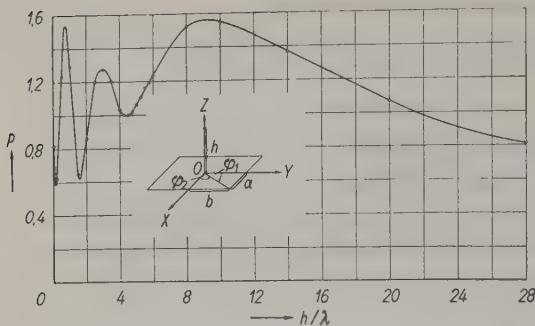


Abb. 8. Schalldruckamplitude auf der Symmetrieachse $2a/\lambda = 4$; $\varphi_1 = 0,59$, $2b/\lambda = 6$, $\varphi_2 = 0,98$;

$$p = \sqrt{p_a^2 + p_m^2},$$

$$p_a + ip_m = e^{-ikh} - \frac{2}{\pi} \int_0^{\varphi_1} e^{-ik\sqrt{h^2 + a^2/\cos^2 \varphi}} d\varphi - \\ - \frac{2}{\pi} \int_0^{\varphi_2} e^{-ik\sqrt{h^2 + b^2/\cos^2 \varphi}} d\varphi.$$

In den Abb. 6—9 sind die Fälle $2a/\lambda = 4$, $2b/\lambda = 4$; $2a/\lambda = 6$, $2b/\lambda = 6$; $2a/\lambda = 10$, $2b/\lambda = 10$; $2a/\lambda = 4$, $2b/\lambda = 6$; $2a/\lambda = 6$, $2b/\lambda = 10$ und $2a/\lambda = 4$, $2b/\lambda = 10$ dargestellt.

Im Vergleich zu der kreisförmigen Kolbenmembran ist der Verlauf der Schalldruckamplitude der quadratischen (bzw. rechteckigen) Kolbenmembran auf der Symmetrieachse grundsätzlich verschieden. Während bei der kreisförmigen Membran die auftretenden Extremwerte der relativen Schalldruck-

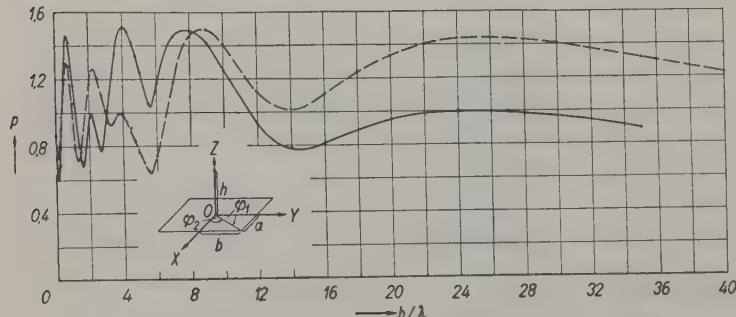


Abb. 9. Schalldruckamplitude auf der Symmetrieachse

$$\text{——— } 2a/\lambda = 4, \varphi_1 = 0,38, 2b/\lambda = 10, \varphi_2 = 1,19; \\ \text{--- } 2a/\lambda = 6, \varphi_1 = 0,54, 2b/\lambda = 10, \varphi_2 = 1,03;$$

$$p = \sqrt{p_a^2 + p_m^2},$$

$$p_a + ip_m = e^{-ikh} - \frac{2}{\pi} \int_0^{\varphi_1} e^{-ik\sqrt{h^2 + a^2/\cos^2 \varphi}} d\varphi - \\ - \frac{2}{\pi} \int_0^{\varphi_2} e^{-ik\sqrt{h^2 + b^2/\cos^2 \varphi}} d\varphi.$$

amplitude durch die Werte Zwei und Null gekennzeichnet sind [15], liegen die Maximalwerte der quadratischen (bzw. rechteckigen) Membran wesentlich unter Zwei und die Minimalwerte wesentlich über Null [16] (Abb. 7).

3. Die Kurven konstanter Schalldrucks in der XY-, XZ- und YZ-Ebene

Wir stellen uns die Aufgabe, die Komponenten des Schalldrucks für die drei Ebenen, die XY-, XZ- und YZ-Ebene (Abb. 5), in der Umgebung der strahlenden rechteckigen Membran zu berechnen, um daraus die Kurven konstanter Schalldrucks darzustellen. Nach den früheren Ausführungen genügt es, den Aufpunkt senkrecht über einer Ecke des Rechtecks durch a und b und der Aufpunktsabstand durch h gegeben, so folgt nach Gl. (2):

$$p_a + ip_m = \frac{i}{\lambda} \int_0^b dy \int_0^a dx \frac{e^{-ik\sqrt{h^2 + x^2 + y^2}}}{\sqrt{h^2 + x^2 + y^2}}.$$

Führen wir die neuen Variablen $u = kx$, $v = ky$ ein, so ist

$$p_a + ip_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{kb} dv \int_0^{ka} du \left[\frac{\sin \sqrt{(kh)^2 + u^2 + v^2}}{\sqrt{(kh)^2 + u^2 + v^2}} + \right. \\ \left. + i \frac{\cos \sqrt{(kh)^2 + u^2 + v^2}}{\sqrt{(kh)^2 + u^2 + v^2}} \right]. \quad (38)$$

Für $h = 0$, d. h. für die XY-Ebene, bestehen nach den Ausführungen des ersten Abschnitts keine wesentlichen Schwierigkeiten die Berechnung durchzuführen. Aber für $h \neq 0$ sind wir nicht in der Lage allgemeine Formeln anzugeben. Wir ziehen es deshalb vor, für alle drei Ebenen graphische Verfahren anzuwenden und diese durch Berechnung der Schalldruckkomponenten in der XY-Ebene zu kontrollieren. Dabei sind die neuerdings veröffentlichten Tafeln über die verallgemeinerten Sinus- und Cosinus-Integralfunktionen [17] von besonderem Nutzen.

Führen wir die dort tabellierten Funktionen ein:

$$S(a, x) = \int_0^x \frac{\sin \sqrt{u^2 + a^2}}{\sqrt{u^2 + a^2}} du,$$

$$C(a, x) = \int_0^x \frac{1 - \cos \sqrt{u^2 + a^2}}{\sqrt{u^2 + a^2}} du,$$

so folgt aus Gl. (38):

$$P_a = \frac{1}{2\pi} \int_0^{kb} S[\sqrt{(kh)^2 + v^2}, ka] dv, \quad (39)$$

$$P_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{kb} dv \int_0^{ka} \frac{du}{\sqrt{(kh)^2 + u^2 + v^2}} - \\ - \frac{1}{2\pi} \int_0^{kb} C[\sqrt{(kh)^2 + v^2}, ka] dv. \quad (40)$$

Dabei lässt sich das erste Doppelintegral in Gl. (40) allgemein auswerten.

Es ist:

$$\int_0^{kb} dv \int_0^{ka} \frac{du}{\sqrt{(kh)^2 + u^2 + v^2}} = \\ = \int_0^{kb} dv \log \left(\frac{ka + \sqrt{(kh)^2 + (ka)^2 + v^2}}{\sqrt{(kh)^2 + v^2}} \right) + \\ = kb \log \left(\frac{(ka + \sqrt{(kh)^2 + (ka)^2 + (kb)^2})}{\sqrt{(kh)^2 + (kb)^2}} \right) + \\ + ka \log \left(\frac{kb + \sqrt{(kh)^2 + (ka)^2 + (kb)^2}}{\sqrt{(kh)^2 + (ka)^2}} \right) - \\ - kh \arctg \left(\frac{ka \cdot kb}{kh \sqrt{(kh)^2 + (ka)^2 + (kb)^2}} \right).$$

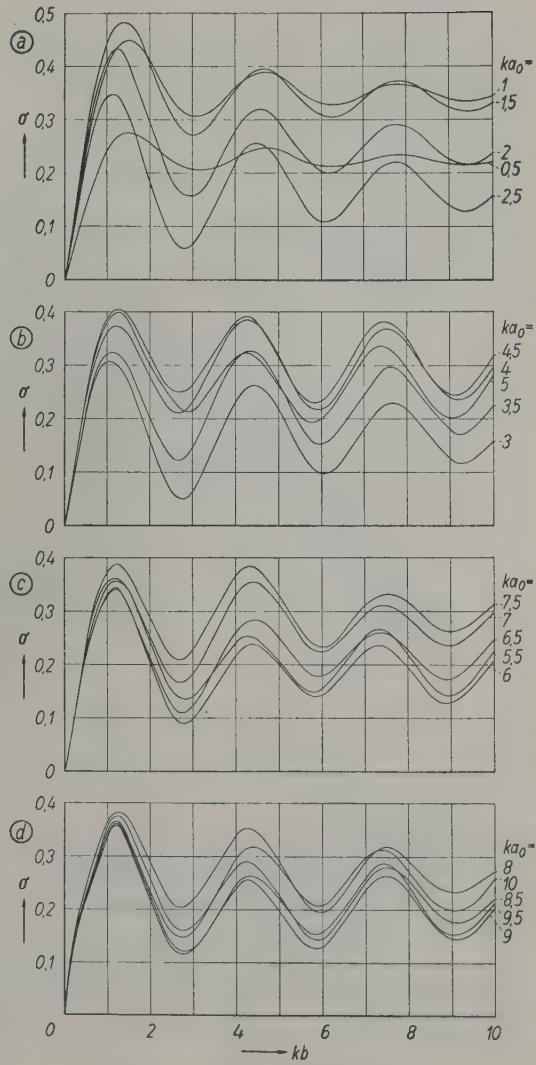
Die zur Berechnung erforderlichen Funktionen

$$\sigma(ka, kb, kh) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{kb} dv \int_0^{ka} \frac{\sin \sqrt{(kh)^2 + u^2 + v^2}}{\sqrt{(kh)^2 + u^2 + v^2}} = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_0^{kb} S[\sqrt{(kh)^2 + v^2}, ka] dv, \quad (41)$$

$$\gamma(ka, kb, kh) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{kb} dv \int_0^{ka} \frac{1 - \cos \sqrt{(kh)^2 + u^2 + v^2}}{\sqrt{(kh)^2 + u^2 + v^2}} = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_0^{kb} C[\sqrt{(kh)^2 + v^2}, ka] dv \quad (42)$$

wurden durch graphische Integration bestimmt und im Fall $kh = 0$ explizit für $ka_0 = 1, 2, 3 \dots 10$ durch Kurven dargestellt (Abb. 10a–d und 11).

Danach können die Werte der Schalldruckamplituden für die im Abstand $\lambda/2\pi$ befindlichen Gitterpunkte der einzelnen Ebenen mit den entsprechenden Werten der Schalldruckamplituden beziffert werden und durch Interpolation die Kurven kon-

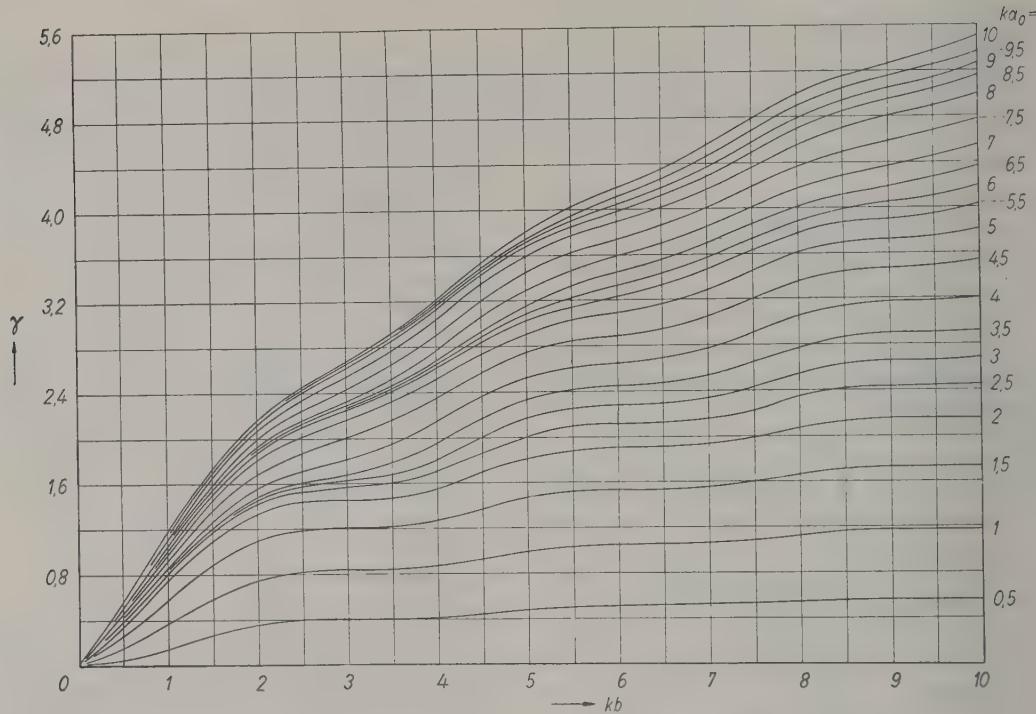


$$\text{Abb. 10. } \sigma(ka_0, kb) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{kb} dv \int_0^{ka_0} \frac{\sin \sqrt{u^2 + v^2}}{\sqrt{u^2 + v^2}};$$

- (a) für $ka_0 = 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5$.
- (b) für $ka_0 = 3; 3,5; 4; 4,5; 5$.
- (c) für $ka_0 = 6,5; 6; 6,5; 7; 7,5$.
- (d) für $ka_0 = 8; 8,5; 9; 9,5; 10$.

stanter Amplitude eingezeichnet werden. Die so berechneten Schallfelder der Quadrate mit $2\pi a_0/\lambda = 2\pi b_0/\lambda = 3, 6$ und 10 und der Rechtecke mit $2\pi a_0/\lambda = 10, 2\pi b_0/\lambda = 5; 2\pi a_0/\lambda = 10, 2\pi b_0/\lambda = 2,5$ und $2\pi a_0/\lambda = 6, 2\pi b_0/\lambda = 3$ sind in den Abb. 12–17 dargestellt. Dabei sind die Seiten durch $2a_0$ und $2b_0$ bezeichnet¹.

¹ Für die Ausführung der graphischen Integration und die Darstellung der Kurven bin ich Herrn Dipl.-Phys. BROSZE zu besonderem Dank verpflichtet.



$$\text{Abb. 11. } \gamma(ka_0, kb) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{kb} dv \int_0^{ka_0} du \frac{1 - \cos \sqrt{u^2 + v^2}}{\sqrt{u^2 + v^2}} \quad \text{für } ka_0 = 0,5; 1; \dots; 10.$$

II. DIE BERECHNUNG UND GRAPHISCHE DARSTELLUNG DER KOMPONENTEN DER STRAHLUNGSIMPEDANZ

Um die Strahlungsimpedanz der rechteckigen Kolbenmembran der Fläche F zu finden, haben wir den gesamten auf die Fläche F ausgeübten Druck P^* zu berechnen. Dabei schreiben wir P^* in der Form:

$$P^* = Fc \cdot \sigma w_0 e^{i\omega t} (P_a + iP_m) \quad (43)$$

und bezeichnen die (dimensionslosen) Größen P_a und P_m als die (relativen) Komponenten der Strahlungsimpedanz. Dann ist $c\sigma P_a$ gleich dem Strahlungswiderstand. Zunächst betrachten wir den, auf das im Punkt x, y befindliche Flächenelement $dx dy$ ausgeübten (relativen) Druck $\Phi(x, y) dx dy$, der (Abb. 18) von den vier Rechtecken 1, 2, 3, 4 mit den Seiten $x, y; a-x, y; a-x, b-y; x, b-y$ herrührt. Dann ist wegen Gl. (3) und (43):

$$P_a + iP_m = \frac{1}{F} \int_0^a dx \int_0^b dy \Phi(x, y)$$

und

$$\Phi(x, y) = \varphi(x, y) + \varphi(a-x, y) + \varphi(a-x, b-y) + \varphi(x, b-y).$$

Nun ist aber:

$$\begin{aligned} \iint_0^a \varphi(x, y) dx dy &= \iint_0^a \varphi(a-x, y) dx dy = \\ &= \iint_0^a \varphi(a-x, b-y) dx dy = \\ &= \iint_0^a \varphi(x, b-y) dx dy. \end{aligned}$$

Damit folgt:

$$P_a + iP_m = \frac{4}{F} \int_0^a \int_0^b \varphi(x, y) dx dy. \quad (44)$$

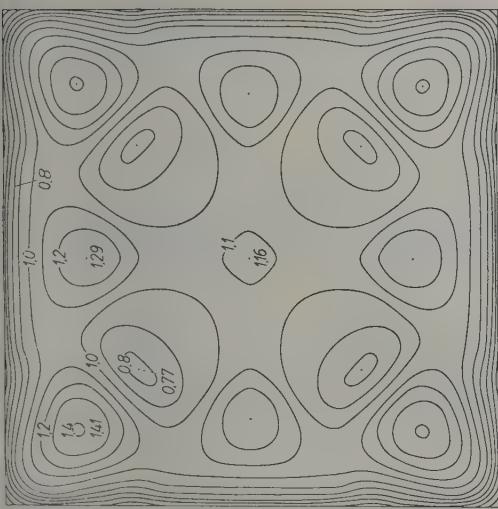
Ersetzen wir $\varphi(x, y)$ durch die Reihe (4) so folgt:

$$\begin{aligned} P_a + iP_m &= \frac{k}{\lambda} \Phi_0 - \frac{k^3}{\lambda \cdot 3!} \Phi_2 + \frac{k^5}{\lambda \cdot 5!} \Phi_4 - \dots + \\ &+ i \left(\frac{k}{\lambda} \Phi_{-1} - \frac{k^2}{\lambda \cdot 2!} \Phi_1 + \frac{k^4}{\lambda \cdot 4!} \Phi_3 - \dots \right) \end{aligned} \quad (45)$$

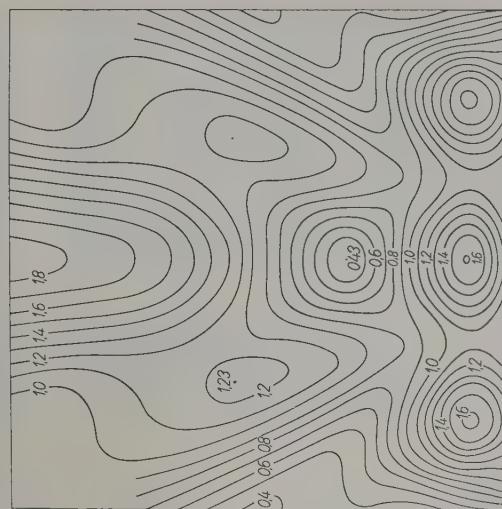
mit

$$\Phi_n = \frac{4}{F} \int_0^a \int_0^b \varphi_n(x, y) dx dy \quad (n = -1, 0, 1, \dots) \quad (46)$$

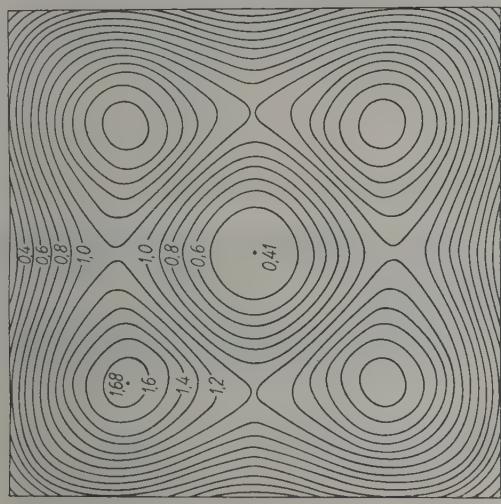
Für gerades n lässt sich die Integration in Gl. (46) ohne weiteres durchführen. Setzen wir $\varphi_{2n}(x, y)$ aus Gl. (6) in (46) ein, so finden wir:



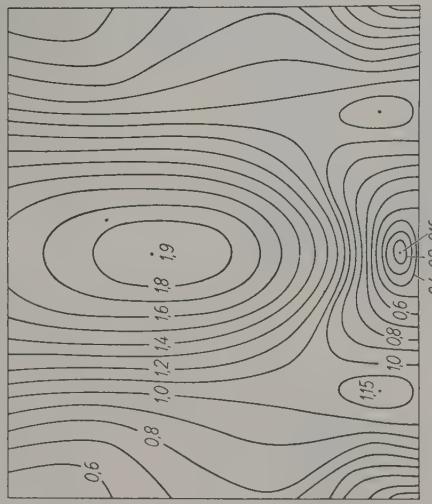
(a)



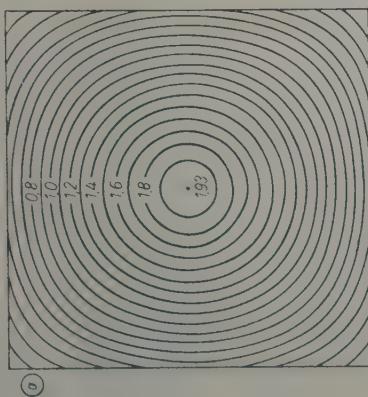
(b)



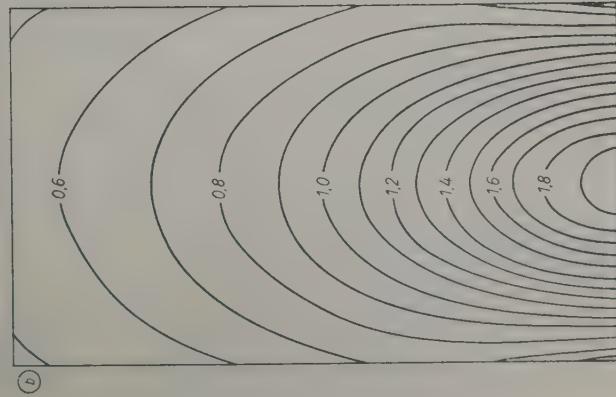
(a)



(b)



(a)



(b)

Abb. 12. Schallfeld der quadratischen Kolbenmembran mit $k a_0 = 3$;
(a) in der XY-Ebene,
(b) in der YZ-Ebene.

Abb. 13. Schallfeld der quadratischen Kolbenmembran mit $k a_0 = 6$;
(a) in der XY-Ebene,
(b) in der YZ-Ebene.

Abb. 14. Schallfeld der quadratischen Kolbenmembran mit $k a_0 = 10$;
(a) in der XY-Ebene,
(b) in der YZ-Ebene.

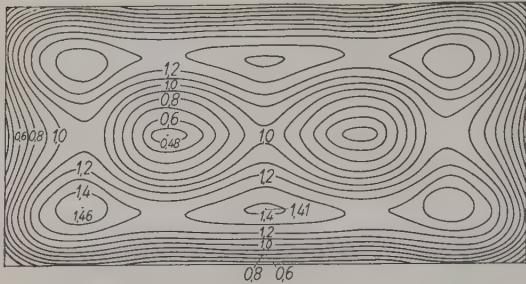


Abb. 15 a (oben).
Schallfeld der rechteckigen
Kolbenmembran in der
 XY -Ebene;
 $ka_0 = 10, kb_0 = 5$.

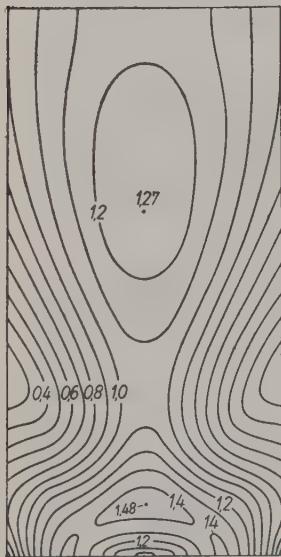


Abb. 15b (links).
Schallfeld der rechteckigen
Kolbenmembran in der
YZ-Ebene;
 $ka_0 = 10$, $kb_0 = 5$.

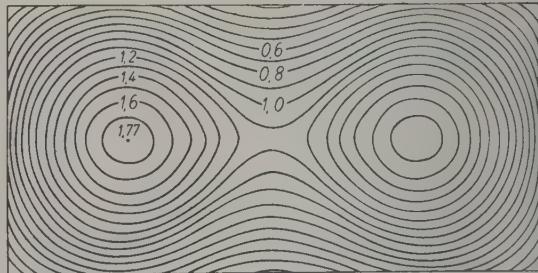


Abb. 16a (oben).
Schallfeld der rechteckigen
Kolbenmembran in der
 XY -Ebene;
 $ka_0 = 6$, $kb_0 = 3$.

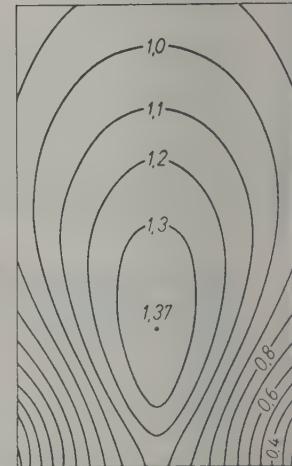


Abb. 16b (rechts).
Schallfeld der rechteckigen
Kolbenmembran in der
YZ-Ebene;
 $ka_0 = 6$, $kb_0 = 3$.

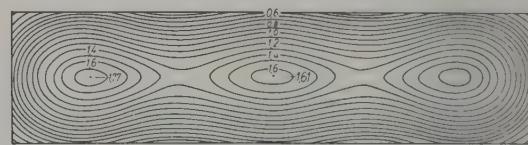


Abb. 17a (oben).
Schallfeld der rechteckigen Kolben-
membran in der XY-Ebene;
 $ka_0 = 10$, $kb_0 = 2,5$.

$$\begin{aligned}\Phi_{2n}(a, b) = & ab \left[\frac{a^{2n}}{1 \cdot (2n+1) \cdot 1 \cdot (n+1)} + \right. \\ & + \frac{\binom{n}{1} a^{2n-2} b^2}{3 \cdot (2n-1) \cdot 2 \cdot n} + \\ & + \frac{\binom{n}{2} a^{2n-4} b^4}{5 \cdot (2n-3) \cdot 3 \cdot (n-1)} + \dots \\ & \left. + \frac{\binom{n}{n} b^{2n}}{(2n+1) \cdot 1 \cdot (n+1) \cdot 1} \right].\end{aligned}$$

Dann können wir das allgemeine Glied von P_a in Gl. (45) in der Form schreiben:

$$\frac{1}{\lambda} \frac{k^{2n+1}}{(2n+1)!} \Phi_{2n}(a, b) = \frac{2\pi ab}{\lambda^3} \cdot \frac{2^{2n+1} \pi^{2n}}{(2n+2)!} \sum_{p=0}^n \binom{n+1}{p} (p+1) \frac{a^{2n-2p} b^{2p}}{(2p+1)(2n-2p+1)}$$

und erhalten schließlich, wenn wir $b/a=q$ setzen:

$$P_a = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2a\pi}{\lambda} \right)^{2n+2} \cdot \frac{1}{(2n+2)!} \chi_{2n}(q) \quad (47)$$

mit

$$\chi_{2n}(q) = \sum_{p=0}^n \binom{n+1}{p} \frac{q^{2n+1}}{(p+1)(2p+1)(2n-2p+1)}. \quad (48)$$

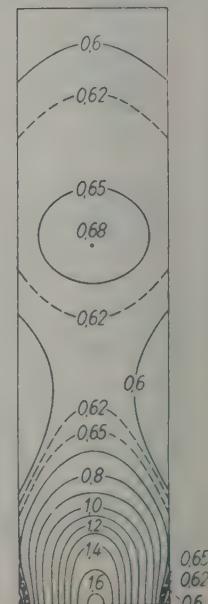
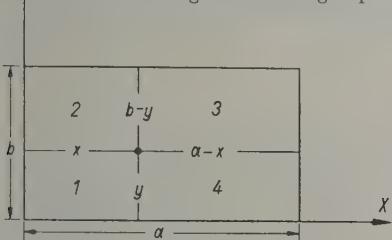


Abb. 18.

Zur Berechnung der Strahlungsimpedanz.



Mit Hilfe der für $q=0,1; 0,2; 0,5; 1$ berechneten Funktionen (s. die Tabelle am Schluß der Abhandlung) ergab sich für P_a die folgende Tabelle III.

Um für ungerades n die Integration in Gl. (46) auszuführen, verfahren wir ähnlich wie bei der Inte-

Tabelle III

| $a\pi/\lambda$ | $b/a = 0,1$ | $b/a = 0,2$ | $b/a = 0,5$ | $b/a = 1$ |
|----------------|-------------|-------------|-------------|-----------|
| 0,5 | 0,01548 | 0,03093 | 0,07687 | 0,15056 |
| 1,0 | 0,05706 | 0,11372 | 0,27751 | 0,51011 |
| 1,5 | 0,11288 | 0,22391 | 0,52895 | 0,87305 |
| 2,0 | 0,17034 | 0,33543 | 0,75399 | 1,07096 |
| 2,5 | 0,22195 | 0,43260 | 0,90789 | 1,07689 |
| 3,0 | 0,26729 | 0,51406 | 0,98900 | 0,98873 |
| 3,5 | 0,31047 | 0,58767 | 1,02359 | 0,92521 |
| 4,0 | 0,35556 | 0,66117 | 1,03904 | 0,93637 |
| 4,5 | 0,40021 | 0,73580 | 1,04652 | 0,99124 |
| 5,0 | 0,45160 | 0,80648 | 1,04218 | 0,103155 |
| 6,0 | 0,53878 | 0,91499 | 0,98931 | 0,99694 |

gration für φ_{2n-1} nach Gl. (7), indem wir die Integration über das Rechteck durch die Integration über die beiden Dreiecke ersetzen. Dann erhalten wir:

$$\Phi_{2n-1}(a, b) = \frac{4}{F} \int_0^b dy \int_0^{\frac{a}{b}y} \varphi_{2n-1}(x, y) dx + \frac{4}{F} \int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a}x} \varphi_{2n-1}(x, y) dy. \quad (49)$$

Unter Berücksichtigung von Gl. (10) ergibt sich dann:

$$(2n+1) \frac{2 \cdot 4 \cdots 2n}{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)} \int_0^{\xi} \varphi_{2n-1}(x, y) dx = f(\xi, y) - f(0, y) \quad (50)$$

mit

$$f(\xi, y) = \xi^{2n+2} \log\left(\frac{y + \sqrt{\xi^2 + y^2}}{\xi}\right) + y^{2n+1} \xi \log\left(\frac{\xi + \sqrt{\xi^2 + y^2}}{y}\right) + \dots \quad (51)$$

$$+(-1)^n y (\xi^2 + y^2)^{1/2} \left[A_0^{(n)} y^{2n} - A_1^{(n)} y^{2n-2} (\xi^2 + y^2)^{1/2} \right]$$

$$f(0, y) = (-1)^n y^{2n+2} \left[\frac{\binom{n}{2}}{2n+2} - (-1)^n \right]$$

$$3A_1^{(n)} = \binom{n}{n-1} + \binom{n-1}{n-1} + (-1)^{n-1} \cdot 1$$

$$5A_2^{(n)} = \binom{n}{n-2} + \binom{n-1}{n-2} + 2 \binom{n-2}{n-2} + (-1)^{n-2} \cdot 2 \binom{n}{3}$$

$$7A_3^{(n)} = \frac{\binom{n}{n-3}}{2n+2} + \binom{n-1}{n-3} + \frac{2}{3} \binom{n-2}{n-3} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \binom{n-3}{n-3} + (-1)^{n-3} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}$$

$$(2n-1)A_{n-1}^{(n)} = \frac{\binom{n}{1}}{2n-2} + \frac{\binom{n-1}{1}}{2n-3} + \frac{2\binom{n-2}{1}}{2n-4} + \cdots + \frac{2 \cdot 4 \cdots (2n-4)}{3 \cdot 5 \cdots (2n-3)} \binom{1}{1} - \frac{2 \cdot 4 \cdots (2n-4)}{3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}$$

$$(2n+1)A_n^{(n)} = \frac{1}{2n+2} + 1 + \frac{2}{3} + \cdots + \frac{2 \cdot 4 \cdots (2n-2)}{3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} + \frac{2 \cdot 4 \cdots (2n-2)}{3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}.$$

Setzen wir in Gl. (50) für ξ den Wert ay/b ein und integrieren dann von $y=0$ bis $y=b$, so erhalten wir zur Berechnung der ersten Summanden in Gl. (49), indem wir die Abkürzung:

$$A_{\sigma}^{(n)} = A_0^{(n)} - A_1^{(n)} + \dots + (-1)^n A_n^{(n)}$$

benutzen:

$$(2n+1) \frac{2 \cdot 4 \cdots 2n}{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)} \int_0^b dy \int_0^a \varphi_{2n-1}(x, y) dx = \frac{a^{2n+2} b}{(2n+3)(2n+2)} \log \left(\frac{b + \sqrt{a^2 + b^2}}{a} \right) +$$

$$+ \frac{b^{2n+2} a}{2n+3} \log \left(\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{b} \right) - (-1)^n \frac{b^{2n+3}}{2n+3} A_{\sigma}^{(n)} + (-1)^n \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2n+3} \cdot$$

$$\cdot [A_0^{(n)} b^{2n+2} - A_1^{(n)} b^{2n} (a^2 + b^2) + A_2^{(n)} b^{2n-2} (a^2 + b^2)^2 - \dots + (-1)^n A_n^{(n)} b^n (a^2 + b^2)^n]. \quad (52)$$

Zur Berechnung des zweiten Summanden in Gl. (49) haben wir auf der rechten Seite von Gl. (52) a mit b zu vertauschen. Durch Addition ergibt sich dann (mit der Abkürzung $q = b/a$):

$$\Phi_{2n-1}(a, b) = \frac{4}{2n+1} \cdot \frac{3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n} \cdot a^{2n+1} \cdot \psi_{2n+1}(q) \quad (53)$$

mit

$$\psi_{2n+1}(q) = \frac{1}{2n+2} \log(q + \sqrt{1+q^2}) + \frac{q^{2n+1}}{2n+2} \log\left(\frac{1+\sqrt{1+q^2}}{q}\right) - (-1)^n \frac{(1+q^{2n+3})}{(2n+3)q} A_{\sigma}^{(n)} +$$

$$+ \frac{(-1)^n \sqrt{1+q^2}}{(2n+3)q} \left[A_0^{(n)} (1+q^{2n+2}) - A_1^{(n)} (1+q^{2n}) (1+q^2) + \right.$$

$$\left. + A_2^{(n)} (1+q^{2n-2}) (1+q^2)^2 - \dots + (-1)^n A_n^{(n)} (1+q^2) (1+q^2)^n \right]. \quad (54)$$

Aus

$$P_m = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n k^{2n}}{(2n)!} \Phi_{2n-1}(a, b)$$

folgt dann schließlich:

$$P_m = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{a\pi}{\lambda}^{2n+1} \frac{1}{(2n+1)n!n!} \psi_{2n+1}(q). \quad (55)$$

Die Berechnung von $\psi_{2n+1}(q)$ ist wegen der auftretenden Summen:

$$C_p^{(m)} = \binom{m}{p} + \frac{2}{3} \binom{m-1}{p} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \binom{m-2}{p} + \dots + \frac{2 \cdot 4 \cdots (2m-2p)}{3 \cdot 5 \cdots (2m-2p+1)} \binom{p}{p} \quad (56)$$

besonders für große m und kleine p ziemlich umständlich. Dabei können wir zur Vereinfachung (oder zur Kontrolle) von der Beziehung Gebrauch machen²:

$$C_p^{(m)} + C_{m-p}^{(m)} = \frac{2 \cdot 4 \cdots (2m+2)}{1 \cdot 3 \cdots (2p+1) \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2m-2p+1)}. \quad (57)$$

Zum Beispiel folgt aus Gl. (56):

$$C_m^{(m)} = 1, C_0^{(m)} = 1 + \frac{2}{3} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{2 \cdot 4 \cdots 2m}{3 \cdot 5 \cdots (2m+1)},$$

$$C_{m-1}^{(m)} = m + \frac{2}{3}, \quad C_1^{(m)} = m + \frac{2}{3} (m-1) + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} (m-2) + \dots + \frac{2 \cdot 4 \cdots (2m-2)}{3 \cdot 5 \cdots (2m-1)}$$

wegen Gl. (57): $1 + \frac{2}{3} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{2 \cdot 4 \cdots 2m}{3 \cdot 5 \cdots (2m+1)} = \frac{2 \cdot 4 \cdots (2m+2)}{1 \cdot 3 \cdots (2m+1)} - 1,$

$$m + \frac{2}{3} (m-1) + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} (m-2) + \dots + \frac{2 \cdot 4 \cdots (2m-2)}{3 \cdot 5 \cdots (2m-1)} \cdot 1 = \frac{2 \cdot 4 \cdots (2m+2)}{1 \cdot 3 \cdots 5 \cdots (2m-1)} - m - \frac{2}{3}.$$

² Durch den Schluß von n auf $n+1$ beweist man Gl. (57) zunächst für $p=0$ und dann für $p=1, 2, \dots$ wieder durch den Schluß von n auf $n+1$ mit Hilfe der Beziehung: $C_p^{(m+1)} = C_p^{(m)} + C_{p-1}^{(m)}.$

Mit Hilfe der für $q=0,1; 0,2; 0,5; 1$ berechneten Funktionen $\psi_{2n+1}(q)$ (s. die Tabelle am Schluß der Abhandlung) ergab sich für P_m die folgende Tabelle IV.

Tabelle IV

| $a\pi/\lambda$ | $b/a=0,1$ | $b/a=0,2$ | $b/a=0,5$ | $b/a=1$ |
|----------------|-----------|-----------|-----------|---------|
| 0,5 | 0,10963 | 0,17713 | 0,30950 | 0,43327 |
| 1,0 | 0,20523 | 0,32470 | 0,53467 | 0,66108 |
| 1,5 | 0,27815 | 0,42642 | 0,63115 | 0,61989 |
| 2,0 | 0,33086 | 0,48411 | 0,60997 | 0,41268 |
| 2,5 | 0,36858 | 0,51315 | 0,52085 | 0,20961 |
| 3,0 | 0,40279 | 0,52967 | 0,41830 | 0,12290 |
| 3,5 | 0,43389 | 0,54273 | 0,33354 | 0,14239 |
| 4,0 | 0,46317 | 0,55136 | 0,26929 | 0,18912 |
| 4,5 | 0,48794 | 0,54930 | 0,21499 | 0,19468 |
| 5,0 | 0,50553 | 0,53402 | 0,16408 | 0,16942 |

Für größere Werte von $a\pi/\lambda$ wurde P_m durch graphische Integration ermittelt.

Der Gesamtverlauf von P_a und P_m ist in der Abb. 19 bei verschiedenem Seitenverhältnis ($b/a=q$) in Abhängigkeit von ka_0 dargestellt. Will man

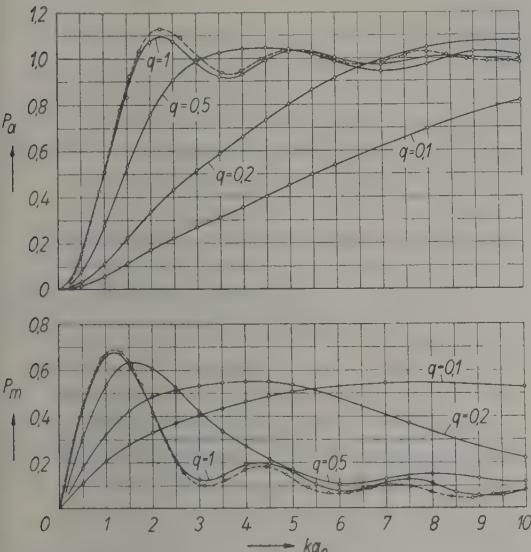


Abb. 19. Die Komponenten der Strahlungsimpedanz der rechteckigen Kolbenmembran bei verschiedenem Seitenverhältnis ($b/a=q$) und des Kreises (— — —).

die einzelnen Kurven bei verschiedenem q miteinander vergleichen, so hat man zu beachten, daß bei gleichem ka_0 die zugehörige Rechteckfläche F von q abhängt. Es ist dann anschaulicher, anstatt ka_0 als abhängige Variable die Größe $\frac{\pi}{\lambda} \sqrt{F} = \frac{\pi a}{\lambda} \sqrt{q} = ka_0 \sqrt{q}$ zu wählen. Die so für $q=1$ und $q=0,5$ erhaltenen Kurven sind in der Abb. 20 dargestellt. Man wird daraus den Schluß ziehen, daß die Strahlungsimpedanz eines Rechtecks, dessen Seitenverhältnis zwischen 1 und $1/2$ liegt, angenähert durch die Strahlungsimpedanz des flächengleichen Kreises ersetzt werden kann. Die in der Formel (47) angegebene Beziehung wurde bereits früher auf andere Weise durch Einführung des Strahlungsfaktors S abgeleitet. Dabei besteht die Beziehung:

$$P_a = \frac{2\pi F}{\lambda^2} \cdot S. \quad (58)$$

Indem wir an die weiteren früher [18], [19] abgeleiteten Beziehungen anknüpfen, wollen wir eine neue Formel für S angeben, die zur Berechnung für größere $a\pi/\lambda = x$ und $b\pi/\lambda = y$ geeignet erscheint.

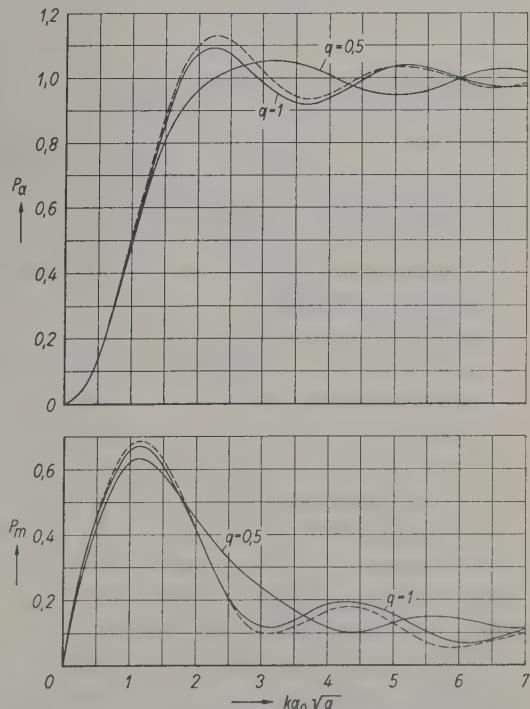


Abb. 20. Die Komponenten der Strahlungsimpedanz der rechteckigen Kolbenmembran bei verschiedenem Seitenverhältnis ($b/a=q$) und des Kreises (— — —).

Wir gehen aus von der Formel:

$$S(x, y) = \varphi_0(x) - \frac{1}{2} \cdot \frac{2^3}{4!} y^2 \varphi_1(x) + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{2^5}{6!} y^4 \varphi_2(x) - \dots \quad (59)$$

$$\text{mit } \varphi_0(x) = -\frac{\sin^2 x}{x^2} + \frac{1}{x} \int_0^{2x} \frac{\sin z}{z} dz \quad (60)$$

und

$$\varphi_{n-1}(x) - \varphi_n(x) = \frac{1}{2x^2} \left[\frac{2 \cdot 4 \cdots (2n-2)}{3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} - \frac{(n-1)!}{2x^n} S_{n-1}(2x) \right]. \quad (61)$$

Mit Hilfe der sich aus Gl. (60) und (61) ergebenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}\varphi_0(x) &= \varphi_0(x) + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2x^2}, \\ \varphi_1(x) &= \varphi_0(x) + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2x^2} \cdot \frac{2}{1} + \frac{0! S_0(2x)}{4x^3}, \\ \varphi_2(x) &= \varphi_0(x) + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2x^2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 3} + \frac{0! S_0(2x)}{4x^3} + \frac{1! S_1(2x)}{4x^4}, \\ \varphi_3(x) &= \varphi_0(x) + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2x^2} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{0! S_0(2x)}{4x^4} + \frac{1! S_1(2x)}{4x^4} + \frac{2! S_2(2x)}{4x^5} \text{ usw.}\end{aligned}$$

erhalten wir aus Gl. (59):

$$\begin{aligned}S(x, y) &= \left[\varphi_0(x) + \frac{1}{2x^2} \right] \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2^3}{4!} y^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{2^5}{6!} y^4 - \dots \right) - \frac{1}{2x^2} \left(1 - \frac{2^3}{4!} y^2 + \frac{2^5}{6!} y^4 - \dots \right) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \cdot \frac{2^3}{4!} y^2 \cdot \frac{0! S_0(2x)}{4x^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{2^5}{6!} y^4 \left(\frac{0!}{4x^3} S_0(2x) + \frac{1! S_1(2x)}{4x^4} \right) - \dots\end{aligned}$$

Führen wir noch die Funktion $\psi(y)$ ein:

$$\psi(y) = \frac{1}{2y} \int_0^{2y} J_0(x) dx - \frac{J_1(2y)}{y} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2^3}{4!} y^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{2^5}{6!} y^4 - \dots \quad (62)$$

und berücksichtigen die Beziehung:

$$\frac{\sin^2 y}{y^2} = 1 - \frac{2^3 y^2}{4!} + \frac{2^5 y^4}{6!} - \dots,$$

so ergibt sich schließlich:

$$S(x, y) = \varphi_0(x) \psi(y) + \frac{1}{2x^2} \left[\psi(y) - \frac{\sin^2 y}{y^2} \right] + \sum_{m=0}^{\infty} \Delta_m \quad (63)$$

mit

$$\Delta_0 = \frac{S_0(2x)}{4x^3} [\psi(y) - 1]$$

$$\Delta_m = \frac{m! S_m(2x)}{4x^{m+3}} \left[\psi(y) - 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2^3}{4!} y^2 - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{2^5}{6!} y^4 + \dots + (-1)^{m+1} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2m-1) 2^{2m+1} y^{2m}}{2 \cdot 4 \cdots 2m (2m+2)!} \right] \quad (m=1, 2, \dots) \quad (64)$$

Wegen Gl. (62) ist für hinreichend großes n :

$$\psi(y) - 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2^3}{4!} y^2 - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{2^5}{6!} y^4 + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1) 2^{2n+1}}{2 \cdot 4 \cdots 2n} \cdot \frac{y^{2n}}{(2n+2)!} < \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n+2)} \cdot \frac{2^{2n+3}}{(2n+4)!} y^{2n+2}.$$

Daraus folgt, daß für das $(n+1)$ te Glied Δ_n der Reihe in Gl. (63) die Ungleichung gilt:

$$\Delta_n < \frac{S_n(2x) (y^2/x)^{n+1}}{4x^2(n+2)!(n+1)(2n+3)}$$

und da $S_n(2x)$ unter einer endlichen Schranke liegt, ist die Reihe $\sum \Delta_m$ für beliebiges x und beliebiges y konvergent. Setzen wir ferner die für großes x und y geltenden Beziehungen [19]:

$$S(x, y) \approx \frac{\pi}{2xy},$$

$$\varphi_0(x) \approx \frac{\pi}{2x}, \quad \psi(y) \approx \frac{1}{y}$$

Tabelle V

| $x=y$ | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |
|--|----------|----------|----------|----------|----------|
| φ_0 | 0,67240 | 0,35775 | 0,24866 | 0,18862 | 0,15186 |
| ψ | 0,54539 | 0,24403 | 0,16626 | 0,12631 | 0,09915 |
| $\varphi_0 \cdot \psi$ | 0,36672 | 0,08730 | 0,04134 | 0,02382 | 0,01506 |
| $\frac{\sin^2 y}{y^2}$ | 0,20671 | 0,03580 | 0,00217 | 0,01529 | 0,00296 |
| $\psi - \frac{\sin^2 y}{y^2}$ | 0,33868 | 0,20823 | 0,16409 | 0,11101 | 0,09619 |
| $\frac{1}{2x^2} \left(\psi - \frac{\sin^2 y}{y^2} \right)$ | 0,04233 | 0,00651 | 0,00228 | 0,00087 | 0,00048 |
| $\varphi_0 \psi + \frac{1}{2x^2} \left(\psi - \frac{\sin^2 y}{y^2} \right)$ | 0,40905 | 0,09381 | 0,04362 | 0,02469 | 0,01554 |
| $\Sigma \Delta_m$ | +0,01152 | -0,00188 | -0,00010 | +0,00018 | -0,00010 |
| S | 0,42057 | 0,09193 | 0,04352 | 0,02487 | 0,01544 |
| P_a | 1,0710 | 0,9364 | 0,9974 | 1,0135 | 0,9828 |

in Gl. (63) ein, so folgt, daß

$\sum_m \Delta_m$ für großes x und y gegen

$\sum_m \Delta_m$ Null geht und daher vernachlässigt werden kann.

Zur Erläuterung haben wir in der Tabelle V die Berechnung für $x=y=2, 4, 6, 8, 10$ dargestellt.

Wir möchten danach annehmen, daß für $x \geq y \geq 6$ (mit einem Fehler unter 1%) die Annäherung gilt:

$$S(x, y) \approx \quad (65) \\ \approx \varphi_0(x) \psi(y) + \frac{1}{2x^2} \left[\psi(y) - \frac{\sin^2 y}{y^2} \right] \\ (x \geq y \geq 6).$$

Für noch größere Werte ($x \geq y \geq 10$) können wir dann in Gl. (65) $\psi(y)$ durch $1/y$ und $\varphi_0(x)$ durch

$\pi/2x - 1/2x^2 - \sin 2x/4x^3$ ersetzen und bekommen die Näherung:

$$\frac{2xy}{\pi} S(x, y) = \quad (66) \\ = P_a \approx 1 - \frac{y}{\pi x} \left(\frac{\sin 2x}{2x} + \frac{\sin^2 y}{y^2} \right) \\ (x \geq y \geq 10).$$

(Eingegangen am 1. April 1952.)

Schrifttum

- [1] Lord RAYLEIGH, The theory of sound, Vol I. Macmillan, London 1877.
- [2] PACHNER, J., J. acoust. Soc. Amer. **21** [1949], 617; **23** [1951], 185.
- [3] RIEGGER, H., Wiss. Veröff. Siemens **3** [1924], 67.
- [4] STENZEL, H., Elektr. Nachr.-Te ch. **6** [1927], 247.
- [5] STENZEL, H., Ann. Phys. Lpz. **7** [1930], 953.
- [6] MOLLOY, C. T., J. acoust. Soc. Amer. **4** [1948], 395.
- [7] JAEGER, C., J. Math. Phys. **27**, [1948], 211.
- [8] WATSON, G. N., A treatise on the theory of Bessel functions. University Press Cambridge 1922, S. 180.
- [9] KEIKITIRO TANI, Tables of $si(x)$ and $ci(y)$, Naval Experimental and Research Establishment, Meguro, Tokyo 1931, S. 6 u. 7.
- [10] KEIKITIRO TANI, [9], S. 2.
- [11] WATSON, G. N., [8], S. 752.
- [12] WATSON, G. N., [8], S. 666—697.
- [13] WATSON, G. N., [8], S. 329.
- [14] WATSON, G. N., [8], S. 333.
- [15] BACKHAUS, H. und TRENDLENBURG, F., Z. techn. Phys. **7** [1926], 630.
- [16] SCHOCH, A., Akust. Z. **6** [1941], 318.
- [17] The Annals of the Computation Laboratory of Harvard University **18**, [1949]. Harvard University Press Cambridge, Mass.
- [18] STENZEL, H., Ann. Phys. Lpz. **7** [1930], 955 und 956. Dabei wird hier die Abkürzung $S_n(2x) = \sqrt{\pi x} J_{n+1/4}(2x)$ benutzt.
- [19] STENZEL, H., Leitfaden zur Berechnung von Schallvorgängen. Springer-Verlag, Berlin 1930, 42—44.

Anhang

$$\psi_{2n+1}(q)$$

| $2n+1$ | $q = 0,1$ | $q = 0,2$ | $q = 0,5$ | $q = 1$ |
|--------|------------|-----------|------------|------------|
| 1 | 0,17643239 | 0,2867589 | 0,51066731 | 0,7433022 |
| 3 | 0,05077961 | 0,1049279 | 0,30178947 | 0,7821081 |
| 5 | 0,03361633 | 0,0690219 | 0,21015131 | 0,8023884 |
| 7 | 0,02690234 | 0,0552788 | 0,1714899 | 0,8827744 |
| 9 | 0,02308814 | 0,0476225 | 0,1523822 | 1,0359522 |
| 11 | 0,02055306 | 0,0425902 | 0,1419373 | 1,2886325 |
| 13 | 0,01871396 | 0,0389721 | 0,1361248 | 1,6899751 |
| 15 | 0,01730222 | 0,0362188 | 0,1332202 | 2,3240858 |
| 17 | 0,01617499 | 0,0340397 | 0,1323949 | 3,3328102 |
| 19 | 0,01524907 | 0,0322646 | 0,1332199 | 4,9552962 |
| 21 | 0,01447073 | 0,0307869 | 0,1354716 | 7,5978052 |
| 23 | 0,01380534 | 0,0295348 | 0,1390457 | 11,9554183 |
| 25 | 0,01322580 | 0,0284595 | 0,1439143 | 19,2263123 |
| 27 | | | 0,1501088 | 31,4909292 |
| 29 | | | 0,1577145 | 52,390132 |

$$\chi_{2n}(q)$$

| $2n$ | $q = 0,1$ | $q = 0,2$ | $q = 0,5$ | $q = 1$ |
|------|----------------------------|----------------------------|---------------------------|----------------------------|
| 0 | $1 \cdot 10^{-1}$ | $2 \cdot 10^{-1}$ | $5 \cdot 10^{-1}$ | 1 |
| 2 | $3,3666666 \cdot 10^{-10}$ | $6,9333333 \cdot 10^{-10}$ | $2,0833333 \cdot 10^{-1}$ | $6,66666667 \cdot 10^{-1}$ |
| 4 | $2,0168666 \cdot 10^{-2}$ | $4,1397333 \cdot 10^{-2}$ | $1,2708333 \cdot 10^{-1}$ | $5,66666667 \cdot 10^{-1}$ |
| 6 | $1,4420395 \cdot 10^{-2}$ | $2,9682590 \cdot 10^{-2}$ | $9,3377976 \cdot 10^{-2}$ | $5,52380952 \cdot 10^{-1}$ |
| 8 | $1,1231504 \cdot 10^{-2}$ | $2,3218851 \cdot 10^{-2}$ | $7,5750248 \cdot 10^{-2}$ | $5,93650794 \cdot 10^{-1}$ |
| 10 | $9,2034632 \cdot 10^{-3}$ | $1,9118309 \cdot 10^{-2}$ | $6,5185195 \cdot 10^{-2}$ | $6,89754690 \cdot 10^{-1}$ |
| 12 | $7,7999418 \cdot 10^{-5}$ | $1,6285246 \cdot 10^{-2}$ | $5,8340311 \cdot 10^{-2}$ | $8,55649906 \cdot 10^{-1}$ |
| 14 | $6,7709502 \cdot 10^{-3}$ | $1,4211111 \cdot 10^{-2}$ | $5,3724430 \cdot 10^{-2}$ | 1,12229999 |
| 16 | $5,984227 \cdot 10^{-3}$ | $1,262744 \cdot 10^{-2}$ | $5,0578530 \cdot 10^{-2}$ | 1,54344367 |
| 18 | $5,36323 \cdot 10^{-3}$ | $1,137908 \cdot 10^{-2}$ | $4,8479184 \cdot 10^{-2}$ | 2,2016704 |
| 20 | $4,86059 \cdot 10^{-3}$ | $1,03701 \cdot 10^{-2}$ | $4,717550 \cdot 10^{-2}$ | 3,26987625 |
| 22 | $4,4454 \cdot 10^{-3}$ | $9,5380 \cdot 10^{-3}$ | $4,65261 \cdot 10^{-2}$ | 4,9777802 |
| 24 | $4,0967 \cdot 10^{-3}$ | $8,8403 \cdot 10^{-3}$ | $4,63987 \cdot 10^{-2}$ | 7,7586618 |
| 26 | $3,7997 \cdot 10^{-3}$ | $8,247 \cdot 10^{-3}$ | $4,6774 \cdot 10^{-2}$ | 12,33652 |
| 28 | $3,544 \cdot 10^{-3}$ | $7,737 \cdot 10^{-3}$ | $4,761 \cdot 10^{-2}$ | 19,95174 |
| 30 | $3,321 \cdot 10^{-3}$ | $7,29 \cdot 10^{-3}$ | $4,89 \cdot 10^{-2}$ | 32,7398 |
| 32 | $3,12 \cdot 10^{-3}$ | $6,9 \cdot 10^{-3}$ | $5,06 \cdot 10^{-2}$ | 54,278 |
| 34 | $3,0 \cdot 10^{-3}$ | $6,6 \cdot 10^{-3}$ | $5,3 \cdot 10^{-2}$ | 91,431 |
| 36 | | | $5,5 \cdot 10^{-2}$ | 155,15 |
| 38 | | | | 265,6 |
| 40 | | | | 458 |
| 42 | | | | 796 |
| 44 | | | | 1392 |

Nachtrag bei der Korrektur

Herr R. L. PRITCHARD, New York, mit dem ich über die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit korrespondierte, machte mich freundlicherweise auf die beiden im Jahre 1951 erschienenen Arbeiten aufmerksam:

1. NOMURA, Y. and AIDA, Y., On the radiation impedance of a rectangular plate with an infinitely large fixed baffle. Sci. Rep. Res. Inst. Tohoku Univ., Series B, **1, 2** [1951], 337—347.
2. CHETAEV, D. N., O Soprotivlenii Priamougolnoi Plastiny Kolebliushsheisii v Vyrez Ploskoi Stenki (Concerning the resistance of a rectangular membrane vibrating in an opening in a plane wall). Prikladnaiia Matematika i Mekhanika (Moskau) **15** [1951], 439—444.

Ich bin Herrn PRITCHARD besonders für die Übersendung der beiden Photokopien dankbar.

Außerdem erschien 1952 eine kurze amerikanische Arbeit (Letters to the Editor):

3. SWENSON, G. W., jr. and JOHNSON, W. E., Radiation impedance of a rigid square piston in an infinite baffle. *J. acoust. Soc. Amer.* **24** [1952], 84.

1. Die japanische Arbeit benutzt die Integration in der komplexen Ebene (Residuensatz). Der für P_a abgeleitete Ausdruck ergibt sich dabei in derselben Gestalt wie bei uns, während für P_m ein wesentlich umständlicherer Ausdruck erscheint. Doch lässt sich auch hier die Übereinstimmung mit unserem P_m durch Reihenentwicklung nachweisen.

2. Die russische Arbeit bringt das Ergebnis in Form eines bestimmten Integrals. Daraus lassen sich unsere Funktionen $\chi_{2n}(q)$ und $\psi_{2n+1}(q)$ mit Hilfe des Taylorsche Satzes berechnen.

3. In der amerikanischen Arbeit treten unendliche Reihen auf, deren Koeffizienten bestimmte Integrale sind. Diese Integrale lassen sich ohne Schwierigkeiten auswerten und daraus die $\chi_{2n}(q)$ und $\psi_{2n+1}(q)$ bestimmen.

| $2n$ | $\chi_{2n}^*(q)$ | | | |
|------|------------------|--------------|--------------|--------------|
| | $q = 0,1$ | $q = 0,2$ | $q = 0,5$ | $q = 1$ |
| 0 | 0,1000000000 | 0,2000000000 | 0,5000000000 | 1,0000000000 |
| 2 | 0,0336666667 | 0,0693333333 | 0,2083333333 | 0,6666666667 |
| 4 | 0,0201686667 | 0,0413973333 | 0,1270833333 | 0,5666666667 |
| 6 | 0,0144203952 | 0,029682590 | 0,0933779762 | 0,5523809523 |
| 8 | 0,0112315041 | 0,023218851 | 0,0757502480 | 0,5936507936 |
| 10 | 0,0092034632 | 0,019118309 | 0,0651851946 | 0,6897546897 |
| 12 | 0,0077999418 | 0,016285246 | 0,058340311 | 0,8556499056 |
| 14 | 0,006770950 | 0,014211111 | 0,053724430 | 1,122299922 |
| 16 | 0,005984227 | 0,01262744 | 0,050578530 | 1,54344367 |
| 18 | 0,00536323 | 0,01137908 | 0,04847918 | 2,20916704 |
| 20 | 0,00486059 | 0,0103701 | 0,04717550 | 3,26987625 |
| 22 | 0,0044454 | 0,0095380 | 0,0465261 | 4,9777802 |
| 24 | 0,0040967 | 0,0088403 | 0,0463987 | 7,7586618 |
| 26 | 0,0037997 | 0,0082471 | 0,0467740 | 12,3365194 |
| 28 | 0,0035437 | 0,0077367 | 0,0476097 | 19,9511444 |
| 30 | 0,0033208 | 0,0072933 | 0,0488957 | 32,7397988 |
| 32 | 0,0031249 | 0,0069045 | 0,0506058 | 54,2782568 |
| 34 | 0,0029514 | 0,0065612 | 0,0528560 | 91,4309050 |
| 36 | 0,0027967 | 0,0063047 | 0,0555823 | 155,1518126 |
| 38 | 0,0026579 | 0,0059825 | 0,0588617 | 265,5850180 |
| 40 | 0,0025327 | 0,0057367 | 0,0627522 | 458,1855533 |
| 42 | 0,0024191 | 0,0055147 | 0,0673255 | 796,0459560 |

| $2n+1$ | $\psi_{2n+1}^*(q)$ | | | |
|--------|--------------------|-----------|-----------|--------------|
| | $q = 0,1$ | $q = 0,2$ | $q = 0,5$ | $q = 1$ |
| 1 | 0,1764324 | 0,2867576 | 0,5106651 | 0,7433024 |
| 3 | 0,0507797 | 0,1049273 | 0,3017888 | 0,7821082 |
| 5 | 0,0336164 | 0,0690215 | 0,2101510 | 0,8023885 |
| 7 | 0,0269024 | 0,0552785 | 0,1714894 | 0,8827745 |
| 9 | 0,0230881 | 0,0476223 | 0,1523820 | 1,0359517 |
| 11 | 0,0205530 | 0,0425899 | 0,1419371 | 1,286330 |
| 13 | 0,0187138 | 0,0389719 | 0,1361245 | 1,6899748 |
| 15 | 0,0173022 | 0,0362186 | 0,1332199 | 2,3241120 |
| 17 | 0,0161754 | 0,0340396 | 0,1323945 | 3,3328105 |
| 19 | 0,0152489 | 0,0322646 | 0,1332194 | 4,9552959 |
| 21 | 0,0144705 | 0,0307869 | 0,1354709 | 7,5978080 |
| 23 | 0,0138046 | 0,0295349 | 0,1390448 | 11,9554080 |
| 25 | 0,0132268 | 0,0284598 | 0,1439135 | 19,2263122 |
| 27 | 0,0127193 | 0,0275261 | 0,1501068 | 31,4999851 |
| 29 | 0,0122692 | 0,0267073 | 0,1577002 | 52,3859481 |
| 31 | 0,0118665 | 0,0259838 | 0,1668104 | 88,3071373 |
| 33 | 0,0115034 | 0,0253401 | 0,1775951 | 150,5683845 |
| 35 | 0,0111741 | 0,0247642 | 0,1902534 | 259,2891737 |
| 37 | 0,0108736 | 0,0242466 | 0,2050312 | 450,4240962 |
| 39 | 0,0105980 | 0,0237795 | 0,2222241 | 788,5187210 |
| 41 | 0,0103444 | 0,0233564 | 0,2421871 | 1389,9353787 |

Bemerkenswerterweise stimmen die so aus 2 bzw. 3 berechneten Funktionen $\chi_{2n}^*(q)$ und $\psi_{2n+1}^*(q)$ vollständig überein, weichen aber in der Gestalt von unserem $\chi_{2n}(q)$ und $\psi_{2n+1}(q)$ nicht unwesentlich ab. Und zwar ergibt sich:

$$\chi_{2n}^*(q) = \frac{2q}{2n+3} \left\{ \frac{(1+q^2)^n}{2n+1} [2] + \frac{2n(1+q^2)^{n-1}}{(2n+1)(2n-1)} [1+q^2] + \cdots + \frac{2n(2n-2)\cdots 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3} [1+q^{2n}] \right\} + \frac{2[1+q^{2n+4}-(1+q^2)^{n+2}]}{(2n+3)(2n+4)q},$$

$$(2n+2) \psi_{2n+1}^*(q) = \log(q + \sqrt{1+q^2}) + q^{2n+1} \log\left(\frac{1+\sqrt{1+q^2}}{q}\right) - \frac{2n+1}{2n-3} \frac{2 \cdot 4 \cdots 2n}{3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{q} [1+q^{2n+3}-(1+q^2)^{n+1}] + q\sqrt{1+q^2} \left\{ [1+q^{2n-2}] + \frac{2}{3} (1+q^2) [1+q^{2n-4}] + \cdots + \frac{2 \cdot 4 \cdots (2n-2)}{3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} (1+q^2)^{n-1} [2] \right\}.$$

Wir haben diese Formeln zur Kontrollrechnung benutzt und die genaueren Werte in den Tabellen für $\chi_{2n}^*(q)$ und $\psi_{2n+1}^*(q)$ zusammengestellt. Mit Hilfe dieser Tabellen wurden einige Unrichtigkeiten der Tabelle IV für P_m beseitigt (vgl. Tabelle IV*).

Tabelle IV*

| $a\pi/\lambda$ | $b/a = 0,1$ | $b/a = 0,2$ | $b/a = 0,5$ | $b/a = 1$ |
|----------------|-------------|-------------|-------------|-----------|
| 0,5 | 0,10969 | 0,17712 | 0,30950 | 0,43327 |
| 1,0 | 0,20510 | 0,32471 | 0,53467 | 0,66133 |
| 1,5 | 0,27836 | 0,42639 | 0,63116 | 0,61996 |
| 2,0 | 0,33054 | 0,48416 | 0,60997 | 0,41245 |
| 2,5 | 0,36906 | 0,51304 | 0,52088 | 0,21042 |
| 3,0 | 0,40205 | 0,52965 | 0,41831 | 0,12322 |
| 3,5 | 0,43374 | 0,54276 | 0,33355 | 0,14265 |
| 4,0 | 0,46343 | 0,55129 | 0,26947 | 0,18837 |
| 4,5 | 0,48799 | 0,54945 | 0,21506 | 0,19302 |
| 5,0 | 0,50541 | 0,53385 | 0,16415 | 0,14982 |

SUR LES CONDITIONS AUX LIMITES DE L'ÉQUATION DU SON

Par THÉODORE VOGEL

Centre National de la Recherche Scientifique, C. R. S. I. M., Marseille

Sommaire

Après avoir indiqué ce qu'une théorie ondulatoire de l'acoustique des salles doit conserver des résultats de SABINE, l'auteur discute la notion d'impédance normale spécifique, montre par quelle suite de raisonnements elle s'introduit, et les conséquences qu'on peut en tirer dans un cas simple de propagation. Les expériences faites dans ce cas ne semblent pas vérifier l'hypothèse, laquelle demande donc à être utilisée avec précaution. On termine en suggérant des modifications possibles à la condition aux limites, aboutissant aux notions d'impédances spécifiques normale et tangentielle.

Zusammenfassung

Zunächst wird darauf hingewiesen, daß jede Wellentheorie der Raumakustik mit den SABINE-schen Meßergebnissen vereinbar sein muß. Es wird gezeigt, durch welchen Gedankengang sich der Begriff des normalen spezifischen Wandwiderstandes einführen läßt und welche Folgerungen sich daraus für einen einfachen Fall der Wellenausbreitung ergeben. Die Experimente scheinen in diesem Fall jedoch nicht mit der Hypothese übereinzustimmen, so daß bei Anwendung der Theorie Vorsicht geboten ist. Es wird daher vorgeschlagen, die Theorie dadurch zu erweitern, daß man neben dem normalen einen tangentialen Widerstand einführt.

Summary

A wave theory of room acoustics should account for those of SABINE's results which are substantiated by facts. These are discussed, and it is shown how the boundary condition conducive to the notion of specific normal impedance is most naturally introduced. However, the consequences of that hypothesis do not seem in good accord with experiments, in one simple case at least; caution should therefore be used when applying this boundary condition. A more involved condition is tentatively suggested, taking into account two specific impedances: one normal and one tangential.

1. Introduction:

Remarques sur la théorie de W. C. Sabine

On se propose de discuter dans ce qui suit quelques aspects du problème de la propagation du son dans un espace clos; et il sera sans doute bon de commencer par définir brièvement le point de vue où l'on se place. On croit que le rôle du physicien consiste à choisir ses fondations, qui seront des faits expérimentaux avérés; à construire sur ces fondations un édifice rationnel, en suivant des règles communes sinon à toute la physique théorique, du moins

à tous les édifices voisins; et à aboutir à la prévision de faits observables, qui seront effectivement avérés à leur tour. Cohérence théorique et possibilité d'applications expérimentales sont donc deux conditions à remplir simultanément pour faire œuvre de physicien.

Si l'on examine de ce point de vue l'héritage légué, en matière d'acoustique des salles, par W. C. SABINE [1] et ses continuateurs, on trouve, d'une part, un ensemble de faits avérés, pouvant se résumer ainsi: importance primordiale, pour la qua-

lité de l'audition, de la façon dont le son s'éteint dans la salle après arrêt du fonctionnement des sources; possibilité d'exprimer approximativement cette loi de décroissance par un nombre, dit «temps de réverbération», lequel devra, pour chaque type de salle, être compris dans un intervalle optimum. L'autre part de l'héritage consiste en des énoncés tendant à expliquer les constatations précédentes, c'est-à-dire à les rendre vraisemblables *a priori*. Ces énoncés conduisent à une formule qui exprime le temps de réverbération en fonction d'une grandeur d'ailleurs mal définie, le «coefficent d'absorption» des parois. Enfin, on postule que pour chaque élément de paroi, ce coefficient est spécifique du matériau constituant.

Cette loi de SABINE semble être, depuis assez longtemps déjà, l'objet d'un malentendu entre physiciens et techniciens: ces derniers croient qu'il en existe une justification théorique cohérente (celle de JAEGER ou ses variantes), dont les premiers connaissent toute la faiblesse; mais par contre, on voit des théoriciens essayer de mieux justifier la loi, ou d'en raffiner l'énoncé, dans la croyance que l'ensemble des mesures de coefficients d'absorption et des conclusions qu'on en tire donne entière satisfaction aux techniciens des salles d'audition. Or, voici ce qu'écrivit l'un des plus compétents de ceux-ci:

«Il ne semble pas douteux que les calculs et les recommandations de SABINE ne conduisent à éviter la plupart des défauts du premier ordre que peut présenter l'acoustique d'une salle; mais l'expérience semble bien montrer que des défauts du second ordre, encore importants, ne puissent être corrigés, ni par une application plus méticuleuse, ni par des perfectionnements de la théorie de SABINE. Ce que nous disons là ne peut guère être mis sous forme mathématique précise; mais c'est une conviction que l'on acquiert au contact quotidien des problèmes réels» (J. MOIR) [2].

Il semble donc que le mieux soit d'abandonner carrément toute référence à la théorie géométrique de SABINE, en ne conservant que la partie avérée de son héritage; il s'agit donc de construire une théorie de la propagation du son dans les espaces clos, qui soit cohérente avec le reste de la mécanique des fluides (puisque l'on a affaire au mouvement de l'air sous l'action de forces), et qui arrive à rendre compte de l'importance de la réverbération, et à la préciser. Le problème ainsi posé est évidemment un problème aux limites, c'est-à-dire qu'il faut adopter une loi du mouvement pour les molécules d'air, exprimée par une équation aux dérivées partielles, et une condition aux limites, que devra satisfaire la solution en tout point des parois: cette condition

exprimera de son côté une propriété physique intrinsèque des parois.

La question a été traitée sous cet angle, à la suite de Lord RAYLEIGH qui lui consacra quelques pages rapides mais fondamentales, par F. H. VAN DEN DUNGEN d'une part [3], par MORSE, BOLT et leurs nombreux collaborateurs de l'autre [4]. Des résultats théoriques de grande valeur ont été obtenus, et le trésor des faits expérimentaux a été enrichi de nombreuses mesures; mais une mesure n'a de signification que par rapport à une vue théorique des phénomènes, et celles dont il s'agit reposent sur la notion d'impédance acoustique, suggérée par les travaux théoriques cités: et peut-être l'ardeur des expérimentateurs les a-t-elle emportés fort en avant sur un terrain qui n'était pas entièrement assuré. Telles quelles, leurs mesures fournissent des données dont il n'est plus permis de ne pas tenir compte; mais on croit utile de jeter cependant un regard en arrière, pour essayer de mieux se rendre compte de la validité des hypothèses adoptées aussitôt qu'avancées.

2. L'équation de d'Alembert et ses conditions aux limites

En ce qui concerne l'équation différentielle du mouvement, il faut d'abord se demander s'il est légitime de la linéariser en supposant les mouvements infiniment petits. Or cette petitesse doit s'entendre par rapport aux plus petites dimensions intervenant dans la description du domaine d'intégration; les amplitudes de vibration varieront pratiquement entre $5 \cdot 10^{-8}$ cm pour un son à peine audible ($2 \cdot 10^{-4}$ baryes de pression maximum) à la fréquence la plus basse, et 0,06 cm pour un son très intense ($2 \cdot 10^{-3}$ baryes, ou 140 db) à une centaine de Hz: de sorte que des détails de l'ordre du centième de micron dans le premier cas, de l'ordre du cm dans le second, seront «grands». L'hypothèse de la petitesse des mouvements sera donc toujours acceptable.

Peut-on dès lors utiliser l'équation classique de d'ALEMBERT, éventuellement complétée par un terme dissipatif linéaire en $\partial \phi / \partial t$? On observera simplement, à cet égard, que même écrite en termes de pression, l'équation de d'ALEMBERT suppose l'existence d'un potentiel des vitesses, et que cette existence n'est assurée que lorsque le théorème de LAGRANGE s'applique, c'est-à-dire lorsque les accélérations restent constamment bornées: ce qui exclut les problèmes à ondes de choc, coups de claquettes, etc. Une expérimentation au moyen de tels dispositifs ne pourra donc être légitimement inter-

prétée par référence, fût-elle implicite, à une théorie fondée sur l'équation de D'ALEMBERT.

Le choix de la condition aux limites soulève des questions beaucoup plus délicates.

Il faut d'abord remarquer que l'on serait à peu près désarmé, tant du point de vue expérimental que du point de vue théorique, si le système différentiel n'admettait pas de solutions séparables quant au temps, c'est-à-dire de la forme $\varphi = \Phi(x_1, x_2, x_3) \cdot T(t)$, des modes et des pulsations propres; et ensuite, que les difficultés théoriques resteront considérables si ces modes propres ne forment pas une base orthogonale (au moins en quelque sens élargi), permettant de développer en série la solution de tout problème non homogène.

En ce qui concerne le premier point, on démontre aisément le lemme suivant: La condition nécessaire et suffisante pour qu'un système différentiel composé de l'équation

$$\Delta_2 \varphi - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \varphi - h \partial_t \varphi = 0$$

et d'une condition aux limites soit séparable par rapport au temps est que la condition aux limites soit homogène par rapport à φ et à ses dérivées partielles par rapport au temps. Si l'on pose

$$\frac{\Delta_2 \Phi}{\Phi} = \frac{\frac{1}{c^2} \ddot{T} + h \dot{T}}{T} = \text{const} = \frac{\lambda^2}{c^2},$$

le facteur temporel devient $T = \exp \hat{\lambda} t$, avec $\hat{\lambda}$ racine de l'équation

$$\hat{\lambda}^2 + hc^2 \hat{\lambda} - \lambda^2 = 0.$$

Après division par une puissance convenable de $\exp \hat{\lambda} t$, on trouvera bien un système différentiel purement spatial en Φ ; mais il convient d'observer, d'abord, que l'existence ni l'unicité de la solution ne sont assurées en général (lorsque la condition aux limites n'est pas linéaire); et que lorsque le problème est linéaire, c'est-à-dire que la condition aux limites est de la forme

$$\Sigma a_{mn} \partial_t^m \partial_x^n \varphi = 0,$$

le système en Φ dépend du paramètre λ aussi bien par son équation différentielle que par sa condition aux limites

$$\Sigma a_{mn} \hat{\lambda}^m \partial_x^n \Phi = 0$$

(sauf cas exceptionnels), $\hat{\lambda}$ étant une fonction de λ .

Cette particularité, qui explique certains énoncés incorrects que l'on trouve dans les travaux récents (comme quoi les différents modes propres correspondent à des conditions aux limites différentes

— ce qui est contradictoire avec la notion même de mode propre), a une incidence importante sur l'orthogonalité des modes: en effet, si Φ et Φ' en sont deux, correspondant aux valeurs propres distinctes λ et λ' , le théorème de GREEN s'écrit ici

$$\frac{\lambda'^2 - \lambda^2}{c^2} \int_D \Phi \Phi' d\tau = \int_S \left(\Phi' \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial \Phi'}{\partial n} \right) dS.$$

Il y aura orthogonalité stricto sensu dans D si la condition aux limites est de la forme

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} + \alpha \Phi = 0 \quad (\alpha \text{ constante absolue}),$$

et dans ce cas seulement; c'est un résultat bien connu; mais il est bon d'observer (ce qui ne semble pas avoir été signalé jusqu'ici) que le problème est encore maniable si, dans la condition aux limites ci-dessus, α est de la forme $\alpha_0 - \alpha_1(x) \lambda^2$ (α_0 constante absolue, $\alpha_1(x)$ éventuellement fonction des coordonnées): dans ce cas, en effet, la condition

$$\frac{\lambda^2 - \lambda'^2}{c^2} \int_D \Phi \Phi' d\tau + \int_S \Phi \Phi' \alpha_1(x) dS = 0$$

exprime une orthogonalité des modes propres dans $D + S$, relativement à une distribution de STIELTJES de densité $d\mu = d\tau$ dans D et $d\mu = \alpha_1(x) dS$ sur S .

On voit par ce qui précède combien les calculs seraient facilités si l'on pouvait adopter une hypothèse qui conduirait à la condition aux limites $\partial \Phi / \partial n + \alpha \Phi = 0$. Or cette hypothèse s'accorderait bien avec les idées que l'on peut avoir sur les deux cas extrêmes: frontière parfaitement rigide (aucune particule ne peut la traverser, donc condition exprimant que la composante de la vitesse normale à la frontière est nulle, $\partial \varphi / \partial n = 0$ ou $\partial \Phi / \partial n = 0$), et surface fluide libre (pression constante, soit nulle, sur la surface en question, donc condition $\rho \cdot \partial \varphi / \partial t = 0$ ou encore $\Phi = 0$); de plus, elle jouirait de tout le prestige que lui confère l'analogie thermocinétique, puisque

$$\frac{\partial \Theta}{\partial n} + \alpha \Theta = 0$$

est la condition aux limites classique pour le cas du passage de chaleur partiellement empêché.

Pour formuler l'hypothèse en question, il faut l'exprimer en termes d'observables, vitesse des particules et pression: or, en multipliant les deux membres par le facteur temporel $\exp \hat{\lambda} t$, on voit que $\exp \hat{\lambda} t \cdot \partial \Phi / \partial n = \partial \varphi / \partial n$ est la composante normale de la vitesse des particules au voisinage des parois, et $\Phi \cdot \exp \hat{\lambda} t$ est proportionnel à la pression sur la paroi, $\rho \cdot \partial \varphi / \partial t = \rho \hat{\lambda} \Phi \cdot \exp \hat{\lambda} t$; de sorte que l'hypothèse s'énonce: le rapport de la pression de l'air sur la paroi à la vitesse normale est

indépendant de la répartition spatiale de l'état vibratoire. Autrement dit, ce rapport est, en tout point de la paroi, spécifique de celle-ci. Ce rapport a d'ailleurs les dimensions d'une impédance, et on l'appellera **impédance spécifique normale de la paroi**.

3. Discussion de la notion d'impédance spécifique normale

Il faut maintenant se poser deux questions: 1. l'hypothèse faite permet-elle d'utiliser les faits relatifs à la réverbération, et comment? 2. les conséquences qu'on peut en déduire sont-elles toutes vérifiées par l'expérience?

Pour ce qui est du premier point, on voit immédiatement que le temps de réverbération d'un mode propre est lié au décrément, c'est-à-dire à la partie réelle de la valeur propre qui correspond au mode. Les considérations qui suivent s'inspirent, avec quelques modifications, du beau travail de VAN DEN DUNGEN.

Soit Φ un mode propre correspondant à la valeur propre λ ; en désignant par des astérisques les grandeurs imaginaires conjuguées, on aura les systèmes différentiels

$$\begin{cases} \Delta_2 \Phi - \frac{\lambda^2}{c^2} \Phi = 0 \text{ (D)} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\rho \lambda}{\delta} \Phi \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \Delta_2 \Phi^* - \frac{(\lambda^2)^*}{c^2} \Phi^* = 0 \text{ (D)} \\ \frac{\partial \Phi^*}{\partial n} = \frac{\rho \lambda^*}{\delta^*} \Phi^* \end{cases} \quad (S)$$

et par application du théorème de GREEN aux fonctions Φ et Φ^* ,

$$\int_D (\Phi \Delta_2 \Phi^* - \Phi^* \Delta_2 \Phi) d\tau = \int_S \left(\Phi \frac{\partial \Phi^*}{\partial n} - \Phi^* \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) d\sigma$$

$$\text{soit } \frac{(\lambda^2)^* - \lambda^2}{c^2} \int_D \Phi \Phi^* d\tau = \rho \int_S \left(\frac{\lambda^*}{\delta^*} - \frac{\lambda}{\delta} \right) \Phi \Phi^* d\sigma.$$

On peut d'ailleurs supposer normés les modes propres, qui ne sont définis qu'à un facteur d'amplitude près; de sorte qu'il est licite de poser $\int_D \Phi \Phi^* d\tau = 1$

sans rien perdre en généralité. Si l'on met en évidence les parties réelles et imaginaires de λ et de δ , soit

$$\lambda = \delta + i\omega; \quad \delta = r + is,$$

on aura donc

$$\begin{aligned} -\frac{4i\omega\delta}{\rho c^2} &= \delta \int_S \left(\frac{1}{\delta^*} - \frac{1}{\delta} \right) \Phi \Phi^* d\sigma - \\ &- i\omega \int_S \left(\frac{1}{\delta^*} + \frac{1}{\delta} \right) \Phi \Phi^* d\sigma = \\ &= 2i \left(\delta \int_S \frac{s \Phi \Phi^* d\sigma}{r^2 + s^2} - \omega \int_S \frac{r \Phi \Phi^* d\sigma}{r^2 + s^2} \right) \end{aligned}$$

d'où

$$\delta = \frac{\int_S \frac{r \omega \Phi \Phi^* d\sigma}{r^2 + s^2}}{\frac{2\omega}{\rho c^2} + \int_S \frac{s \Phi \Phi^* d\sigma}{r^2 + s^2}}.$$

Les deux cas particuliers les plus simples sont ceux où δ est le même en tout point de la frontière, et celui où de plus sa partie imaginaire est nulle; on a alors respectivement

$$\delta = \frac{\rho c^2 r \omega I}{2\omega(r^2 + s^2) + \rho c^2 s I} \quad \text{et} \quad \delta = \frac{\rho c^2 I}{2r},$$

en désignant par I l'intégrale $\int_S \Phi \Phi^* d\sigma$, qui peut d'ailleurs recevoir la signification physique de moyenne des modules de pression sur la paroi au temps 0, à un facteur de proportionnalité près.

On voit que même dans le cas très simple où l'impédance normale est une constante réelle, sa connaissance ne suffit pas à déterminer δ ; il faut encore connaître la répartition moyenne des modules de pression sur la paroi, c'est-à-dire avoir résolu préalablement le problème de l'état vibratoire de l'enceinte.

Mais peut-être a-t-on été trop difficile, et trop précis; peut-être faut-il donner à la notion de temps de réverbération un contenu à la fois plus large et plus vague? Il est connu que l'équation des ondes admet des solutions fondamentales planes, de sorte qu'il est loisible de ne considérer dans tous les problèmes que des superpositions de telles composantes, d'incidences diverses. Admettons que le temps de réverbération moyen qui caractérise la qualité d'une enceinte pour une pulsation donnée soit, comme le veut SABINE, inversement proportionnel à un coefficient d'absorption moyen, ce dernier s'étendant pris comme la moyenne des coefficients d'absorption aux incidences diverses, et celles-ci étant uniformément distribuées: si l'on suppose la paroi plane et indéfinie, l'hypothèse d'une impédance normale spécifique permet facilement le calcul et la mesure de ce coefficient sous l'incidence θ : si $x=0$ est l'équation de la paroi, on aura pour système différentiel

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \Phi = 0; \quad \left(\delta \frac{\partial \Phi}{\partial x} - i\omega \rho \Phi \right)_{x=0} = 0,$$

d'où la solution

$$\Phi = \exp(i\omega y \sin \theta/c) [\exp(i\omega x \cos \theta/c) + r \cdot \exp(-i\omega x \cos \theta/c)]$$

avec

$$(1-r)\delta \cos \theta - (1+r)\rho c = 0$$

soit

$$r = \frac{\delta \cos \theta - \rho c}{\delta \cos \theta + \rho c}.$$

Posons

$$\beta = Z \rho c \cdot \exp i\alpha, \quad Z \text{ et } \alpha \text{ réels};$$

il vient

$$rr^* = R^2 = \frac{1 + Z^2 \cos^2 \theta - 2Z \cos \alpha \cos \theta}{1 + Z^2 \cos^2 \theta + 2Z \cos \alpha \cos \theta}.$$

Le coefficient d'absorption moyen serait alors

$$\bar{a} = \frac{\pi/2}{0} \int a(\theta) \cos \theta \sin \theta d\theta; \quad a(\theta) = 1 - R^2.$$

On remarquera que de la mesure de $a(\theta)$ sous deux incidences distinctes, d'ailleurs quelconques, on peut déduire l'impédance normale. Dans le cas théorique de l'absorbant type «gâteau de miel» étudié par Lord RAYLEIGH, $\alpha = \pi/4$; on peut poser

$$Z\sqrt{2} = 1/M \quad (0 \leq M \leq 1)$$

et alors

$$\bar{a} = 8M \left(1 + M \log \frac{2M^2}{2M^2 + 2M + 1} \right) \quad [5].$$

Cette expression passe par un maximum d'environ 0,83 pour $M = 0,4$, et \bar{a} est alors sensiblement égal à a (55°). C'est pour cette raison que, désirant mesurer le coefficient d'absorption sous incidence donnée pour avoir des résultats ayant une signification physique précise, nous avons adopté depuis 1945 l'incidence de 55° au laboratoire d'acoustique du Centre de Recherches Scientifiques, Industrielles et Maritimes de Marseille. En réalité, il faut bien dire que le choix de cette incidence n'a pas une importance très grande, du fait que les mesures montrent que le cas de RAYLEIGH $\alpha = \pi/4$ est assez rarement rencontré dans l'étude des matériaux insonores courants. Toutefois, la mesure basée sur le principe ci-dessus présente un autre intérêt, qui importe davantage ici: c'est de permettre une expérience cruciale vérifiant la validité de l'hypothèse d'une impédance normale spécifique: en effet, lorsqu'on fait tomber, en chambre sans écho de grandes dimensions, une onde plane sur un assez grand panneau plan incliné à θ , il se forme un système d'ondes stationnaires, et l'on peut aisément observer les modules maxima et minima de pression au voisinage du panneau; c'est en somme l'expérience du tuyau acoustique de E. T. PARIS, faite dans de meilleures conditions (pas d'effets de paroi, peu d'effets de bord).

Que l'on forme alors l'expression

$$m = \frac{|p_{max}|}{|p_{min}|} + \frac{|p_{min}|}{|p_{max}|} = \frac{1+R}{1-R} + \frac{1-R}{1+R} = 2 \cdot \frac{1+R^2}{1-R^2},$$

elle vaut

$$\frac{1 + Z^2 \cos^2 \theta}{Z \cos \alpha \cos \theta},$$

et si Z et α sont vraiment indépendants de la distribution Φ , donc de θ , on peut les éliminer entre les

expressions de m correspondant à trois incidences distinctes; pour préciser, il doit exister entre les trois valeurs observées de m la relation

$$\frac{m_1 \cos \theta_1 - m_2 \cos \theta_2}{m_0 \cos \theta_0 - m_1 \cos \theta_1} = \frac{\cos^2 \theta_1 - \cos^2 \theta_2}{\cos^2 \theta_0 - \cos^2 \theta_1}.$$

En particulier, si les angles choisis sont $0^\circ, 45^\circ, 60^\circ$, cette relation prend la forme extrêmement simple

$$\mu = \frac{m_2 - 0,7m_1}{0,4m_0} = 1.$$

De nombreuses vérifications expérimentales ont été faites au Laboratoire du C. R. S. I. M. A titre d'exemple, le tableau ci-après reproduit les résultats obtenus avec un échantillon de Tropal:

Tableau I

| fréquence [Hz] | 200 | 500 | 1000 | |
|----------------|------|------|------|-----------------------|
| m_0 | 2,45 | 2,42 | 2,35 | |
| m_1 | 2,50 | 2,30 | 2,17 | |
| m_2 | 2,10 | 2,17 | 2,05 | |
| μ | 0,36 | 0,58 | 0,58 | (valeur théorique: 1) |

Les mesures ont été recommencées bien des fois, avec une dispersion relativement faible, et il est peu probable que l'erreur commise sur chacune d'elles puisse atteindre 10%, de sorte que l'erreur sur μ n'est sans doute pas supérieure à 20% en tout état de cause. On voit que le désaccord entre les conséquences de l'hypothèse et les faits observés est trop considérable pour ne pas être inquiétant.

4. Peut-on suggérer d'autres conditions aux limites?

On peut remarquer que jusqu'ici l'hypothèse de l'impédance normale spécifique a fait l'objet de vérifications assez indirectes; c'est ainsi qu'en l'appliquant au problème de la propagation du son dans une enceinte rectangulaire, on obtient des résultats très satisfaisants (voir en particulier C. M. HARRIS [6]). Or ce en quoi ce problème semble différer de l'expérience ci-dessus, c'est l'incidence des modes propres sur la paroi, car cette incidence est quasi nulle dans la salle parallélépipédique, si l'on admet que l'absorption n'a pas trop troublé les modes. L'hypothèse discutée serait-elle donc valable pour les ondes planes presque normales, et ne le serait-elle plus aux fortes incidences? Ceci suggérerie alors une modification de la condition aux limites, faisant intervenir des termes se réduisant au gradient normal pour l'incidence nulle: par exemple, on pourrait ajouter un terme de gradient tangentiel, ou remplacer le gradient normal par le gradient total.

Si l'on essaye cette dernière forme dans le cas de l'expérience décrite, il faudra remplacer $\partial \Phi / \partial x$ par

$1/\cos \theta \partial \phi / \partial x$, d'où

$$(1-r)\delta - (1+r)\rho c = 0; \quad r = \frac{\delta - \rho c}{\delta + \rho c},$$

et m serait alors une constante indépendante de θ . Le Tableau II indique les écarts relatifs des valeurs précédemment données par rapport à leur moyenne arithmétique.

Tableau II

| fréquence [Hz] | 200 | 500 | 1000 |
|---------------------------------|------|------|------|
| $\bar{m} = (m_0 + m_1 + m_2)/3$ | 2,35 | 2,30 | 2,19 |
| m_0/\bar{m} | 1,04 | 1,06 | 1,07 |
| m_1/\bar{m} | 1,06 | 1,00 | 0,99 |
| m_2/\bar{m} | 0,90 | 0,94 | 0,94 |

Dans le cas le plus défavorable, l'écart n'est que de 10%.

La suggestion semblerait donc assez séduisante; mais on ne peut songer sérieusement à une condition telle que

$$\delta [\Delta_1 \phi]^{1/2} - \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

(Δ_1 : premier paramètre différentiel de LAMÉ), non seulement à cause de sa non-linéarité (difficulté qui ne serait peut-être pas dirimante, car on observera qu'en vertu de lemme du n° 2 la condition permet des solutions séparables par rapport au temps, ce qui est l'essentiel), mais encore parce qu'elle conduit à supposer les absorptions sous incidence rasante aussi fortes que celles sous incidence normale, ce que l'expérience contredit.

Il reste possible que la condition la plus acceptable soit celle suggérée en premier lieu, et qui est en quelque sorte intermédiaire entre les deux que l'on a discutées. Cette condition pourrait s'écrire, par exemple,

$$\delta_n \frac{\partial \phi}{\partial n} + \delta_s \frac{\partial \phi}{\partial s} - \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

où $\partial \phi / \partial s$ désigne la dérivée tangentielle de ϕ sur la paroi: comme

$$\Delta_1 \phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial s} \right)^2,$$

on arrive à une telle expression en linéarisant la précédente, moyennant l'hypothèse supplémentaire, que des analogies optiques ne paraissent pas rendre choquante a priori, d'un rapport spécifique de grad_n à grad_s dans la couche absorbante. Le problème aux limites serait alors ramené à la catégorie des problèmes à dérivée oblique donnée,

qui ont été étudiés dans la théorie du potentiel, notamment par BOULIGAND et GIRAUD [7] et plus récemment par FICHERA [8].

Si l'on reprend le cas de l'expérience sous incidence θ , on trouvera

$$r = \frac{\delta_n \cos \theta + \delta_s \sin \theta - \rho c}{\delta_n \cos \theta - \delta_s \sin \theta + \rho c}$$

d'où, - si $\delta_n = Z_n \cdot \exp i\alpha_n$ et $\delta_s = Z_s \cdot \exp i\alpha_s$,

$$m = \frac{1 + Z_n^2 \cos^2 \theta + Z_s^2 \sin^2 \theta - 2 Z_s \cos \alpha_s \sin \theta}{Z_n \cos \alpha_n \cos \theta - 4 Z_n Z_s \cos (\alpha_n - \alpha_s) \sin \theta \cos \theta}$$

qui donne naturellement les mêmes résultats que précédemment pour l'incidence normale, et une absorption nulle pour l'incidence rasante, comme il convient. On pourra encore former, en principe, une relation entre les m observés sous cinq incidences distinctes, mais les calculs effectifs sont pénibles.

Ce ne sont là, bien entendu, que des suggestions, qui demanderaient à être examinées de plus près, tant à la lumière de la théorie que des expériences. Du moins espère-t-on avoir montré que la notion d'impédance normale spécifique doit être utilisée avec quelques précautions, et que son domaine de validité est encore loin d'avoir été nettement délimité.

L'auteur est heureux d'avoir ici l'occasion de remercier I. STROUMZA du Laboratoire d'Acoustique du C. R. S. I. M., qui a effectué avec beaucoup de soin les mesures dont quelques-unes ont été citées dans ce travail.

(Reçu le 15 Août 1952.)

Bibliographie

- [1] SABINE, W. C., Collected Papers. Cambridge, Mass., 1922.
- [2] MOIR, J., J. Soc. Mot. Pict. and Telev. Engrs. **57** [1951], 147.
- [3] VAN DEN DUNGEN, F. H., Bull. Acad. roy. Belg. Cl. Sci. **18** [1932], 437. cf. VOGEL, Th., J. Phys. Radium **11** [1950], 627.
- [4] Résumé ap. MORSE, P. M. and BOLT, R. H., Rev. mod. Phys. **16** [1944], 80.
- [5] VOGEL, Th., Notes C. R. S. I. M., no. 64, 1945; et Ann. Télécommun. (sous presse).
- [6] HARRIS, C. M., J. acoust. Soc. Amer. **17** [1945], 35.
- [7] BOULIGAND, G. et GIRAUD, G., in BOULIGAND, GIRAUD et DELENS, Le problème de la dérivée oblique en théorie du potentiel. Ed. Hermann, Paris 1935 (Actu. Sci. et Ind., no. 219).
- [8] FICHERA, G., Conférence à l'Inst. for Numerical Analysis de Los Angeles, Août 1951.

ON ACOUSTIC DIFFRACTION THROUGH AN APERTURE IN A PLANE SCREEN

by JOHN W. MILES

University of California, Los Angeles

Summary

The scattered wave consequent on the incidence of a monochromatic disturbance on a plane screen perforated by an aperture is constructed with the aid of generalized Fourier transforms. After formulating the integral equation defining this scattered wave, the total transmission cross section is cast in variational form (of the SCHWINGER type) and the result compared with the KIRCHHOFF approximation. A similar result is given for scattering by a plane disc. Application is made to a circular aperture.

Sommaire

On construit, au moyen de la transformation de Fourier généralisée, l'onde diffusée résultant de l'incidence d'une perturbation monochromatique sur un écran plan qui est percé d'un orifice. Après avoir établi l'équation intégrale qui définit cette onde diffusée, on calcule la section efficace totale de transmission sous la forme d'une variation (du type « SCHWINGER ») et on compare le résultat obtenu avec l'approximation de KIRCHHOFF. On donne un résultat analogue, relatif à la diffusion par un disque plan. Application est faite à un orifice circulaire.

Zusammenfassung

Die Beugungswelle, die von einer monochromatischen Störung an einer Öffnung im ebenen Schirm hervorgerufen wird, lässt sich mit Hilfe der verallgemeinerten Fourierschen Transformation darstellen. Nach der Formulierung der Integralgleichung dieser Beugungswelle wird der totale Durchlässigkeitsquerschnitt in Variationsform gebracht (nach SCHWINGER), und das Ergebnis mit der KIRCHHOFFSCHEN Näherung verglichen. Ein ähnliches Resultat wird für die Beugung an der ebenen Scheibe angegeben. Als Beispiel wird der Fall einer kreisrunden Öffnung im ebenen Schirm behandelt.

1. Introduction

We consider here the related questions of diffraction through an aperture in a plane screen and around a plane disc. The low frequency (wave-length large compared to aperture or disc dimensions) analysis of this classical problem was given originally by RAYLEIGH [1], [2], while at high frequencies (wave-length small compared to aperture or disc dimensions, a situation unlikely to be realized in audio-acoustics) KIRCHHOFF's approximation is valid [2]. Exact solutions are available for a half plane [3], a rectilinear slit or strip [4], and a circular aperture or disc [5], the complexity of which (increasing in the order mentioned) establishes the desirability of an approximate method to fill the gap between the limiting approximations. For this purpose, a suitable vehicle is furnished by SCHWINGER's variational principle [6], which has been applied explicitly to both the circular disc [7], and circular aperture [8].

The present paper is a condensation of a more extensive investigation undertaken in 1947, the publication of which (in its entirety) would have

been superfluous after the appearance of the definitive papers of LEVINE and SCHWINGER [7]. However, it seems worthwhile to present the formulation of the problem via generalized Fourier transforms, since the evaluation of the variational expression for the "aperture impedance" often is facilitated by the introduction of these transforms. (cf. [8]. The application of transform methods to the electromagnetic problem has been treated in an earlier paper [9], but here also the stronger use of the variational principle by LEVINE and SCHWINGER [10] is to be noted.) Moreover, some additional points of interest will be brought in.

2. Basic equations

On the linearized acoustic theory, the vector velocity (\mathbf{q}) and perturbation pressure (p) resulting from a monochromatic disturbance of pulsation ω may be expressed in terms of a dimensionless potential (Φ) according to

$$\mathbf{q} = c \operatorname{Re} [\exp(j\omega t) \nabla \Phi], \quad (2.1)$$

$$p = -\rho_0 c^2 \operatorname{Re} [jk \exp(j\omega t) \Phi] \quad (2.2)$$

where c is the sonic velocity, ρ_0 the mass density of the undisturbed medium, k the (dimensionless) wave number, viz.

$$k = \omega l/c \quad (2.3)$$

in terms of a characteristic length l , to which all subsequent linear measures are referred, and Φ is a solution of the Helmholtz equation

$$\nabla^2 \Phi + k^2 \Phi = 0. \quad (2.4)$$

In the following, for analytical convenience, we may assume k to have a small, negative imaginary part, but in the end results it is implicitly real¹.

In general, we pose Φ as a function of the position vector \mathbf{r} , but since we shall focus our attention primarily on the plane $z=0$, it is convenient to introduce the vector \vec{r} for the value of \mathbf{r} there, such that

$$\vec{r} = \vec{r} + \mathbf{z}. \quad (2.5)$$

According to the usual custom, z denotes the scalar value of \mathbf{z} etc.

3. Boundary conditions

We consider a disturbance $\Phi_i(\mathbf{r})$ that is incident on the plane $z=0$ from the left ($z < 0$). This plane is divided into two (open) regions, σ and τ , corresponding to an aperture and perfectly reflecting screen, respectively. The boundary conditions appropriate to these two regions are continuity of both pressure (Φ) and velocity ($\nabla \Phi$) across σ and vanishing normal velocity (Φ_z) on τ . Singularities (in $\nabla \Phi$, not Φ) may exist at the boundary (edge) between σ and τ , but they must be integrable.

In the absence of the aperture the incident wave $\Phi_i(\mathbf{r})$ would give rise to the reflected wave $\Phi_i(\mathbf{r} - 2\mathbf{z})$ in $z < 0$, while the field in $z > 0$ would be null. The presence of the aperture leads to a transmitted wave $\Phi(\mathbf{r})$ in $z > 0$, and we therefore are led to write

$$\Phi_-(\mathbf{r}) = \Phi_i(\vec{r} + \mathbf{z}) + \Phi_i(\vec{r} - \mathbf{z}) - \Phi(\vec{r} - \mathbf{z}), \quad (3.1a)$$

$$\Phi_+(\mathbf{r}) = \Phi(\vec{r} + \mathbf{z}) \quad (3.1b)$$

where the subscripts $-$ and $+$ imply $z < 0$ and $z > 0$, respectively. It is evident that Φ_- and Φ_+ have the same normal derivative at $z=0$, so that it remains to satisfy the boundary conditions of vanishing normal velocity on the screen and continuity of pressure across the aperture, viz.

$$\Phi_z(\vec{r}) = 0, \quad \vec{r} \text{ in } \tau; \quad (3.2)$$

$$\Phi(\vec{r}) = \Phi_i(\vec{r}), \quad \vec{r} \text{ in } \sigma. \quad (3.3)$$

In addition, the appropriate (SOMMERFELD) conditions at infinity must be satisfied. For our purpose,

¹ We use the time dependence $\exp(+j\omega t)$, whereas LEVINE and SCHWINGER [6], [7] and BOUWKAMP [5] use $\exp(-i\omega t)$. For comparison $i \rightarrow -j$.

it suffices to require Φ to vanish at infinity when k has a negative imaginary part.

The problem of diffraction through an aperture σ now may be posed as: find a solution to (2.4) satisfying (2) and (3) and vanishing at infinity. We remark that, while this formulation is equally valid for either diffraction through an aperture or around a disc, it is appropriate primarily to the former case, a preferable formulation for the latter case being set forth in section 6 below. (But if k is very large the preference tends to be reversed; cf. [6].)

4. Aperture integral equation

The classical approach to the problem of determining the solution to (2.4) in $z > 0$ for prescribed values of either Φ or Φ_z on $z=0$ is due to RAYLEIGH, who first determined the appropriate Green's function [11]. Physically interpreted, RAYLEIGH's result represents the disturbance at any point in space in terms of a source distribution over the plane, corresponding to the normal velocity there.

Alternatively, a solution to (2.4) may be exhibited in the form

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_{S_\lambda} k(k^2 - \lambda^2)^{-1/2} F(\vec{\lambda}) \psi(\vec{\lambda}, \vec{r}) \cdot \exp[-j(k^2 - \lambda^2)^{1/2} z] dS(\vec{\lambda}) \quad (4.1)$$

provided that $\psi(\vec{\lambda}, \vec{r})$ satisfies the two dimensional equation ($\vec{\lambda}$ being a spectral vector)

$$\nabla^2 \psi + \lambda^2 \psi = 0. \quad (4.2)$$

(1) represents the solution as a spectral superposition of the elementary solutions

$$\psi(\vec{\lambda}, \vec{r}) \exp[-j(k^2 - \lambda^2)^{1/2} z]$$

with the amplitude distribution

$$k(k^2 - \lambda^2)^{-1/2} F(\vec{\lambda}) dS(\vec{\lambda}).$$

On the assumption that the imaginary part of k is negative, the branch cuts for the radical are taken from $\pm k$ to $\pm k \mp j\infty$ in order to satisfy the requirement of vanishing Φ at infinity, or in the limit where k is real the λ path of integration is to be indented under $-k$ and over $+k$, whence those waves for $|\lambda| > k$ are evanescent. We emphasize that, in general, $\vec{\lambda}$ itself may comprise two (scalar) parameters (see, e. g., appendix).

If we introduce the modified aperture velocity, f , in accordance with

$$\Phi_z(\mathbf{r})|_{z=0} = -jkf(\vec{r}) \quad (4.3)$$

$$(1) \text{ yields } f(\vec{r}) = \int_{S_\lambda} F(\vec{\lambda}) \psi(\vec{\lambda}, \vec{r}) dS(\vec{\lambda}). \quad (4.4)$$

Now, in virtue of the Sturm-Liouville properties of (2), the $\psi(\vec{\lambda}, \vec{r})$ can be determined to form a com-

plete (infinite) set and may be normalized in such a way that the relation inverse to (4) is

$$F(\vec{\lambda}) = \int_{S_\lambda} f(\vec{\rho}) \bar{\psi}(\vec{\lambda}, \vec{\rho}) dS(\vec{\rho}) \quad (4.5)$$

where the bar indicates the complex conjugate. (4) and (5) constitute a generalized Fourier transform pair, examples of which are given in the appendix, and $F(\vec{\lambda})$ is appropriately designated as the "transform" of $f(\vec{\rho})$.

If we now invoke the boundary conditions (3.2) and (3.3) in (1), we have

$$\int_{S_\lambda} k(k^2 - \lambda^2)^{-1/2} F(\vec{\lambda}) \psi(\vec{\lambda}, \vec{\rho}) dS(\vec{\lambda}) = \Phi_i(\vec{\rho}), \vec{\rho} \text{ in } \sigma \quad (4.6a)$$

$$\int_{S_\lambda} F(\vec{\lambda}) \psi(\vec{\lambda}, \vec{\rho}) dS(\vec{\lambda}) = 0, \vec{\rho} \text{ in } \tau \quad (4.6b)$$

which is a dual integral equation [12] for the determination of $F(\vec{\lambda})$.

The integral equation for $f(\vec{\rho})$ is obtained by substituting (5) in (6a) and reversing the order of integration, whence

$$\int_{\sigma} g_{\sigma}(\vec{\rho}, \vec{\rho}') f(\vec{\rho}') dS' = \Phi_i(\vec{\rho}), \vec{\rho} \text{ in } \sigma; \quad (4.7)$$

$$g_{\sigma}(\vec{\rho}, \vec{\rho}') = \int_{S_\lambda} k(k^2 - \lambda^2)^{-1/2} \psi(\vec{\lambda}, \vec{\rho}) \bar{\psi}(\vec{\lambda}, \vec{\rho}') dS(\vec{\lambda}). \quad (4.8)$$

The original diffraction problem is now reduced to the solution of either (6) or (7), after which the total fields may be obtained from (3.1), together with (1).

In the subsequent discussion we shall assume the incident wave to be plane and write

$$\Phi_i(\vec{r}) = \exp(-jk\mathbf{n}_i \cdot \vec{r}) \quad (4.9)$$

where \mathbf{n}_i is a unit vector normal to the wavefront (cf. (7.1) infra).

5. Variational aperture impedance

The (timewise average) power transmitted through the aperture is given by

$$P_t = \frac{1}{2} k^2 \rho_0 c^3 l^2 \sigma_t \quad (5.1)$$

where σ_t is the transmission cross section. As a measure of the complex power transmitted, it is convenient to introduce the aperture impedance

$$Z_{\sigma} = R_{\sigma} + jX_{\sigma} = \sigma^{-1} \int_{\sigma} \exp(jk\mathbf{n}_i \cdot \vec{\rho}) f(\vec{\rho}) dS \quad (5.2)$$

the real (R_{σ}) and imaginary (X_{σ}) parts of which represent the propagated and evanescent waves, respectively, the normalisation being such that

$$\sigma_t = \sigma R_{\sigma}. \quad (5.3)$$

Z_{σ} may be cast in variational form² by multiplying both sides of (4.7) by $f(\vec{\rho}) dS$, integrating over the

aperture and dividing by the square of the magnitude of the resulting, right hand side, whence

$$\begin{aligned} Z_{\sigma}^{-1} = Y_{\sigma} &= G_{\sigma} + jB_{\sigma} = \\ &= \sigma \int_{\sigma} \int_{\sigma} f g_{\sigma} \bar{f} dS dS' / \left| \int_{\sigma} \exp(jk\mathbf{n}_i \cdot \vec{\rho}) f dS \right|^2. \end{aligned} \quad (5.4)$$

This expression is stationary with respect to first order variations of $f(\vec{\rho})$ about the true solution to (4.7); moreover, it is invariant under a scale transformation of f .

In order to exhibit the variational expression in terms of the transforms, we substitute the kernel g_{σ} from (4.8) and, in the denominator, f from (4.4), whence

$$Y_{\sigma} = \sigma \int_{S_\lambda} k(k^2 - \lambda^2)^{-1/2} |F(\vec{\lambda})|^2 dS(\vec{\lambda}) / \left| \int_{S_\lambda} F \bar{\Phi}_i^* dS(\vec{\lambda}) \right|^2 \quad (5.5)$$

where $\Phi_i^*(\vec{\lambda})$ is the transform of $\Phi_i(\vec{\rho})$.

It is evident from (5) and the prescribed phase of the radical that both the real and imaginary parts of Y_{σ} are positive definite, whence, in virtue of the variational principle, the true values are absolute minima. We remark that this does not establish the real part of Z_{σ} (i. e., the transmitted power), albeit stationary, as a minimum.

It is interesting to observe that, insofar as the aperture velocity distribution is assumed to be independent of the direction of incidence (up to a constant multiplier), the transmission cross section for oblique incidence is simply related to that for normal incidence according to

$$\sigma_t(\mathbf{n}_i) = \left| \int_{\sigma} \exp(jk\mathbf{n}_i \cdot \vec{\rho}) f(\vec{\rho}) dS / \int f(\vec{\rho}) dS \right|^2 \cdot \sigma_t(\mathbf{n}_z). \quad (5.6)$$

This result is valuable primarily for small $k \sin \Theta_i$ (Θ_i being the polar angle of incidence), since for large $k \sin \Theta_i$ it would be quite wide of the mark to assume the aperture field to be independent of the direction of incidence.

The KIRCHHOFF approximation leads to the following expressions for the aperture impedance (cf. [7])

$$Z_{\sigma K} = \sigma^{-1} \cos^2 \Theta_i \int_{\sigma} \int_{\sigma} \exp[-jk\mathbf{n}_i \cdot (\vec{\rho} - \vec{\rho}')] \cdot \overline{g_{\sigma}(\vec{\rho}, \vec{\rho}')} dS dS', \quad (5.7)$$

$$Z_{\sigma K} = \sigma^{-1} \cos^2 \Theta_i \int_{S_\lambda} k(k^2 - \lambda^2)^{-1/2} \cdot \overline{\left| \int_{\sigma} \exp(jk\mathbf{n}_i \cdot \vec{\rho}) \bar{\psi}(\vec{\lambda}, \vec{\rho}) dS \right|^2 dS(\vec{\lambda})}. \quad (5.8)$$

² SCHWINGER and LEVINE [7] demonstrate that the differential scattering cross-section, as well as the total cross-section, is stationary.

The result obtained by posing $f=f_i$ in the variational expression (4) is designated as the „variational KIRCHHOFF“ approximation, and comparison of the result so obtained yields the curious relation

$$Y_{\sigma K}^{\text{var.}} = \overline{Z_{\sigma K}} \sec^2 \Theta_i. \quad (5.9)$$

The comparisons between σ_{IK} and $\sigma_{IK}^{\text{var.}}$ in the limits of high and low frequencies have been given by LEVINE and SCHWINGER [7].

6. Reflection from a disc

The formulation of the disc problem follows more or less by analogy, and we are led to introduce (as a measure of the complex, reflected power) the disc admittance

$$(6.1)$$

$$Y_{\tau} = G_{\tau} + jB_{\tau} = \tau^{-1} \cos \Theta_i \int_{\tau} \exp(-jk\mathbf{n}_i \cdot \vec{\rho}) \overline{\Phi(\vec{\rho})} dS$$

where τ is the disc area. The reflection cross-section then is given by $\tau_r = \tau G_{\tau}$.

The corresponding variational expressions are

$$Z_{\tau} = Y_{\tau}^{-1} = \quad (6.3)$$

$$= \tau \sec^2 \Theta_i \int_{\tau} \int \overline{\Phi g_{\tau}} \overline{\Phi} dS dS' / \left| \int_{\tau} \exp(jk\mathbf{n}_i \cdot \vec{\rho}) \Phi dS \right|^2, \quad (6.4)$$

$$Z_{\tau} = \tau \int_{S_{\lambda}} k^{-1} (k^2 - \lambda^2)^{-1/2} \left| \Phi^*(\vec{\lambda}) \right|^2 dS(\lambda) / \left| \int_{S_{\lambda}} \overline{F_i} \Phi^* dS(\lambda) \right|^2.$$

In this case, the real and imaginary parts of Z_{τ} , the reciprocal of Y_{τ} , are positive definite and absolute minima.

If it is assumed that $\Phi = \Phi_i = \exp(-jk\mathbf{n}_i \cdot \vec{\rho})$ thereby violating the boundary condition of continuity of pressure at the edge, it is readily shown that the resulting integral for Z_{τ} obtained from (3) is divergent, whence the ordinary and variational KIRCHHOFF reflection cross-sections are found to be infinite and null, respectively. However, a suitable approximation joining the correct low and high frequency limits can be developed by separating out the low frequency limit ($k \rightarrow 0$) and setting $\Phi = \Phi_i$ in the remainder, whence

$$kZ_{\tau}(k) = \tau \sec^2 \Theta_i \int_{\tau} \int \overline{\Phi_0 g_0} \overline{\Phi_0} dS dS' / \left| \int_{\tau} \Phi_0 dS \right|^2 +$$

$$+ \tau^{-1} \sec^2 \Theta_i \int_{S_{\lambda}} [(k^2 - \lambda^2)^{-1/2} - j|\lambda|] \cdot$$

$$\cdot \left| \int_{\tau} \exp(jk\mathbf{n}_i \cdot \vec{\rho}) \psi(\vec{\lambda}, \vec{\rho}) dS \right|^2 dS(\lambda), \quad (6.5)$$

$$g_0(\vec{\rho}, \vec{\rho}') = \lim_{k \rightarrow 0} k g_{\tau} = j \int_{S_{\lambda}} |\lambda| \psi(\vec{\lambda}, \vec{\rho}) \overline{\psi(\vec{\lambda}, \vec{\rho}')} dS(\lambda) \quad (6.6)$$

where $\Phi_0(\vec{\rho})$ is the static pressure distribution.

In actually evaluating the second term in (5) it is frequently convenient to note that it is directly related to the integral of (5.8) with respect to k , provided that k is held constant where it occurs in the incident wave.

Eq. (5) is not, of course, a consistent approximation, since it poses a different Φ at $k = 0$ than for finite k , and it is, therefore, no longer a variational approximation in the sense that the error in Z_{τ} is of the order of the square of the error in the assumed field. Nevertheless, it has the merits of giving the correct limits at both $k = 0$ and $k = \infty$ and furnishing a continuous and rationally derived approximation at intermediate points. (Cf. the treatment of electromagnetic diffraction by a circular disc or aperture in [9].)

In concluding this section, we remark that LEVINE and SCHWINGER [7] start with the disc formulation for an aperture to obtain a second variational formulation (finite σ) that is superior to that of section 5 at high frequencies. Similarly, the analogue of this second principle for reflection from a disc could be obtained by starting with the formulation of section 3.

7. Circular aperture

The diffraction of a normally incident plane wave through a circular aperture has been treated previously by variational methods in [8], while the case of a circular disc has been treated quite thoroughly by SCHWINGER and LEVINE ([7], after appropriate changes in terminology, since they treat the equivalent problem of diffraction through an aperture subject to the boundary condition $\Phi = 0$ on the screen). We shall consider here only the case of oblique incidence on a circular aperture, approximating the aperture admittance on the basis of the static aperture field.

In polar coordinates (ρ, φ) , a plane wave incident at polar angle Θ_i and azimuthal angle φ_i is specified by

$$\Phi_i = \exp \{ -jk [\rho \sin \Theta_i \cos(\varphi - \varphi_i) + z \cos \Theta_i] \}. \quad (7.1)$$

The $\psi(\vec{\lambda}, \vec{\rho})$ are given in the appendix; assuming $f(\vec{\rho})$ to be independent of φ only the term $n = 0$ enters, and substitution in (5.4) yields

$$Y_{\sigma} = \frac{1}{2} k \int_0^{\infty} (k^2 - \lambda^2)^{-1/2} \left| \int_0^{1/2\pi} \int_0^{1/2\pi} J_0(\lambda \rho) f(\rho) \rho d\rho d\varphi \right|^2,$$

$$\cdot \left| \int_0^{1/2\pi} \int_0^{1/2\pi} \exp[-jk\rho \sin \Theta_i \cos(\varphi - \varphi_i)] f(\rho) \rho d\rho d\varphi \right|^2 \lambda d\lambda \quad (7.2)$$

where the characteristic length is taken as the radius of the aperture. Carrying out the angular integrations reduces this to

$$Y_\sigma = \frac{1}{2} k \int_0^\infty (k^2 - \lambda^2)^{-1/2} \cdot \left| \int_0^1 J_0(\lambda \rho) f(\rho) \rho d\rho \right|^2 d\lambda. \quad (7.3)$$

The static aperture velocity is specified by

$$f(\rho) = (1 - \rho^2)^{-1/2}. \quad (7.4)$$

Substituting this in (3), the radial integrations can be effected via W 12.11(1) and 3.4(3) (W refers to WATSON's treatise [13]) with the result

$$Y_\sigma = \frac{1}{2} k [k \sin \Theta_i / \sin (k \sin \Theta_i)]^2. \quad (7.5)$$

$$\cdot \int_0^\infty \lambda^{-1} (k^2 - \lambda^2)^{-1/2} \sin^2 \lambda d\lambda.$$

To carry out the λ integration we introduce the change of variable $\lambda = kx$, differentiate with respect to k and identify the real and imaginary parts of the result via W 10.4(1) and 6.14(3), respectively, whence

$$Y_\sigma = \frac{\pi}{8} [k \sin \Theta_i / \sin (k \sin \Theta_i)]^2. \quad (7.6)$$

$$\cdot \int_0^{2k} [H_0(x) + jJ_0(x)] dx$$

where H_0 is STRUVE's function.

The result (6) may be expected to furnish a good approximation for small k . (At normal incidence [8] it is quite satisfactory up to $k=1$.) Expanding in powers of k , and substituting in (5.3), we find [14]

$$\sigma_t = \frac{8}{\pi^2} [1 + (0.03916 - \frac{1}{3} \sin^2 \Theta_i) k^2 + O(k^4)] \quad (7.7)$$

which is exact to the approximation indicated, in virtue of the variational principle together with the use of the aperture field that is exact at $k=0$. (In [8] the number 0.03916 was given as 0.03917 due to a small numerical error, the first number being correct, as determined by BOUWKAMP's analysis. The fact that the variational approximation must be exact to this order was pointed out by H. LEVINE [15].)

8. Appendix

In Cartesian coordinates (x, y) , (4.2) reads

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} + \lambda^2 \psi = 0, \quad \vec{\rho} = ix + jy \quad (A 1)$$

and the appropriately normalized solutions are

$$\psi(\vec{\lambda}, \vec{\rho}) = (2\pi)^{-1} \exp(j\vec{\lambda} \cdot \vec{\rho}), \quad (A 2)$$

$$\vec{\lambda} = i\mu + j\nu, \quad dS(\vec{\lambda}) = d\mu d\nu \quad (A 3)$$

and (4.4) and (4.5) reduce to the well known, double Fourier transform pair.

In polar coordinates (ρ, φ) , (4.2) reads

$$\rho(\rho\psi_\rho)_\rho + \psi_{\varphi\varphi} + (\lambda\rho)^2 \psi = 0 \quad (A 4)$$

and the required solutions and corresponding transforms are

$$\psi(\vec{\lambda}, \vec{\rho}) = (2\pi)^{-1/2} J_n(\lambda\rho) \exp(jn\varphi), \quad (A 5)$$

$$f(\rho, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^\infty F(\lambda, n) \psi(\vec{\lambda}, \vec{\rho}) \lambda d\lambda, \quad (A 6)$$

$$F(\lambda, n) = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty f(\rho, \varphi) \psi(\vec{\lambda}, \vec{\rho}) \rho d\rho d\varphi. \quad (A 7)$$

In this case the integration over the λ spectrum must be interpreted as including the summation over the discrete spectrum (n) associated with the angular (φ) distribution of $f(\rho, \varphi)$, in addition to integration over the λ spectrum associated with the radial variable (ρ). The transform pair of (A 6) and (A 7) is, of course, the well known Fourier-Bessel representation.

(Received 26th February, 1952.)

References

- [1] RAYLEIGH, Phil. Mag. **43** [1897], 259; Sci. Papers **4** 283.
- [2] RAYLEIGH, Theory of Sound, Vol. II Macmillan, London 1897, p. 138, 139.
- [3] SOMMERFELD, A., Math. Ann. **47** [1896], 317; see also CARSLAW, H. S., Proc. Lond. math. Soc. **30** [1899], 121; POINCARÉ, H., Acta Mathematica **16** [1892-93].
- [4] SIEGER, B., Ann. Phys., Lpz. **27** [1908], 626; numerical results are given by MORSE, P. M. and RUBENSTEIN, P. J., Phys. Rev. **54** [1938], 895.
- [5] BOUWKAMP, C. J., Dissertation (Groningen 1941); SPENCE, R. D., J. acoust. Soc. Amer. **20** [1948], 381; STORRUSTE, A. and WERGELAND, H., Phys. Rev. **73** [1948], 1397.
- [6] LEVINE, H., J. acoust. Soc. Amer. **22** [1950], 48.
- [7] LEVINE, H. and SCHWINGER, J., Phys. Rev. **74** [1948], 958; **75** [1949], 1423; these papers deal with an optical problem that is mathematically equivalent to the complementary acoustic problem.
- [8] MILES, J. W., J. acoust. Soc. Amer. **21** [1949], 140.
- [9] MILES, J. W., J. appl. Phys. **20** [1949], 760; ibid. **21** [1950], 468.
- [10] LEVINE, H. and SCHWINGER, J., Commun. pure appl. Math. **3** [1950], 355.
- [11] RAYLEIGH, reference [2], p. 107.
- [12] TITCHMARSH, E., Theory of Fourier Integrals. Oxford Univ. Press, London 1937, p. 334.
- [13] WATSON, G. N., Bessel Functions. Univ. Press, Cambridge 1922.
- [14] MILES, J. W., J. acoust. Soc. Amer. **24** [1952], 324.
- [15] LEVINE, H. and SCHWINGER, J., Phys. Rev. **75** [1949], 1608.

LETTER TO THE EDITOR

GAP-LENGTH FORMULA IN MAGNETIC RECORDING

by W. K. WESTMIJZE

Philips Research Laboratories, N. V. Philips' Gloeilampenfabrieken, Eindhoven, Netherlands

In the optical reproduction of a sinusoidal recording (density as well as amplitude modulation) the loss produced by the finite width d of a homogeneously illuminated slit on the reproduction of a recorded wavelength λ is given by the well-known formula

$$\frac{\sin(\pi d/\lambda)}{\pi/d}$$

which is found by a simple integration. For large wavelengths the output is proportional to d .

This formula is sometimes transferred to the case of the loss produced by the finite length l of the gap of a magnetic reproducing head. The processes however being quite different, this is certainly not correct. For this case LÜBECK [1] derived under simplifying conditions the analogous formula

$$G(\pi l/\lambda) = \frac{\sin(\pi l/\lambda)}{\pi l/\lambda}. \quad (1)$$

As is to be expected on physical grounds G is independent of l for large wavelengths.

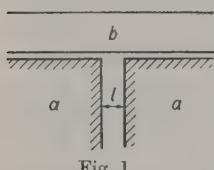


Fig. 1.

Cross-section of pole tips (a) and tape (b) of the type of head discussed.

This however is to be considered only as a first approximation. A more detailed analysis shows that for a tape of unit relative permeability and a reproduction head with pole pieces of infinite permeability and of the shape illustrated in Fig. 1, the gap loss is given by the formula

$$S(\pi l/\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \tan x \sin \left[\frac{2l}{\lambda} \left(\tan x - x + \frac{\pi}{2} \right) \right] dx + \\ + \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi l}{\lambda} \int_0^1 \frac{x}{1-x^2} \cdot \exp \left[\frac{2l}{\lambda} \left(x + \frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x} \right) \right] dx.$$

S represents a damped oscillating function of analogous behaviour as G . The most important differences are

- 1) the first zero occurs for $l=0.88\lambda$ and not as in (1) for $l=\lambda$.
- 2) for large values of the argument, S may be approximated by

$$S(\pi l/\lambda) = 0.699 \frac{\sin(\pi l/\lambda + \pi/6)}{(\pi l/\lambda)^{3/2}} \quad (2)$$

and therefore the amplitude of the successive extremes decreases less rapidly than for G .

Hence the gap length as calculated from the wavelength of the first zero with $l=\lambda$ gives a value for the "effective gap length" that is 10 % larger than the actual gap.

It has been proposed to calibrate the recorded flux as a function of wavelength with the aid of wide-gap measurements [2]. Experimentally it was found that in order to obtain results consistent with narrow-gap measurements a decrease of 2 dB per octave had to be applied if formula (1) was used. This is in accordance with our calculation that predicts a rise of S with respect to G proportional to $(\pi l/\lambda)^{1/2}$.

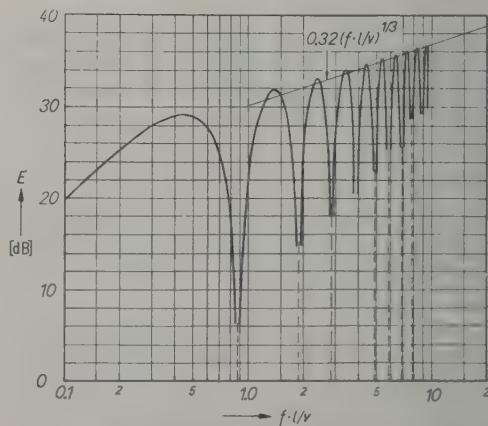


Fig. 2. Voltage E across reproduction coil (arbitrary units) against $f \cdot l/v$; f = frequency, l = gap length, v = tape speed.

In Fig. 2 the reproduced signal for a tape with constant amplitude of the magnetisation as calculated with eq. (2) is plotted against the dimensionless quantity $f \cdot l/v (= l/\lambda)$, where f is the frequency and v the tape speed.

A more detailed review will be published shortly in the Philips Research Reports.

[1] LÜBECK, H., Akust. Z. 2 [1937], 273-295.

[2] AXON, P. E., B.B.C. Quart. 5 [1950], 46-53.

SUBJECT INDEX

SACHREGISTER

TABLE DES MATIÈRES

1 = ACUSTICA 1951; 2 = ACUSTICA 1952; AB = Akustische Beihefe

1. Physical acoustics — Physikalische Akustik — Acoustique physique

| | | | |
|---|--------|---|--------|
| Die Abstrahlung von Impulsen durch ebene Kolbenmembranen in starrer Wand, F. A. FISCHER | 1, 35 | A simplified technique for the pressure calibration of condenser microphones by the reciprocity method, A. K. NIELSEN | 2, 112 |
| Mersenne and Gassendi, J. M. A. LENIHAN | 1, 96 | On the directivity of spherical microphones, W. KUHL | 2, 226 |
| Sound absorption by slit resonators, J. M. A. SMITS and C. W. KOSTEN | 1, 114 | Weiterentwicklung des Tonhöhenschreibers, W. KALLENBACH | AB 37 |
| Die Schwingung der Luftteilchen in der Nähe einer schallabsorbierenden Wand, E. MEYER und R. W. KARMANN | 1, 130 | Frequenzanalysator mit mechanischem Hochtonfilter, K. TAMM und I. PRITSCHING | AB 43 |
| Parameters of sound propagation in granular absorbent materials, M. A. FERRERO and G. G. SACERDOTE | 1, 137 | Schallverzögernde Leisesprecheranlage, G. R. SCHODDER, F. K. SCHRÖDER und R. THIELE | AB 115 |
| Der Schalldurchgang durch Platten, A. SCHOCH | 2, 1 | Eignung des dynamischen Kopfhörers zur Untersuchung frequenzmodulierter Töne, E. ZWICKER und G. GÄSSLER | AB 134 |
| The production of liquid vortex tones, and some associated phenomena, F. L. HOPWOOD | 2, 39 | Das Békésy-Audiometer der Technischen Hochschule Stuttgart, W. KAISER | AB 235 |
| Allgemeine Theorie der Schallabsorption in Gasen und Flüssigkeiten unter Berücksichtigung der Transporterscheinungen, J. MEIXNER | 2, 101 | | |
| Observations on edge-tones, M. MOKHTAR and H. YOUSSEF | 2, 135 | | |
| Behaviour of aerosols in acoustic and turbulent fields, E. G. RICHARDSON | 2, 141 | | |
| Analogie incomplète des impédances caractéristiques électrique et acoustique et conséquences relatives à l'écho dans les milieux stratifiés continus, G. ECKART et P. LIÉNARD | 2, 157 | | |
| The velocity of sound in air, J. M. A. LENIHAN | 2, 205 | | |
| Analyse de mouvements vibratoires dans un tuyau sonore, J. GUITTARD | 2, 231 | | |
| Étude des échos des ondes acoustiques dans le milieu stratifié de la troposphère, G. ECKART . . | 2, 256 | | |
| Die akustische Strahlung der rechteckigen Kolbenmembran, H. STENZEL | 2, 263 | | |
| Sur les conditions aux limites de l'équation du son, TH. VOGEL | 2, 281 | | |
| On acoustic diffraction through an aperture in a plane screen, J. W. MILES | 2, 287 | | |
| Absorptionsfläche akustischer Strahlergruppen, F. A. FISCHER | AB 7 | | |
| Richtcharakteristik von ebenen Strahlergebilden, F. A. FISCHER | AB 9 | | |
| Beugung an der kreisförmigen Öffnung, H. SEVERIN und C. STARKE | AB 59 | | |
| Über die Dämpfung der Biegeschwingungen dünner Bleche durch fest haftende Beläge, H. OBERST und K. FRANKENFELD | AB 181 | | |
| Zur Frequenzanalyse von beliebigen Schallvorgängen, R. BIERL | AB 225 | | |
| | | | |
| 2. Electroacoustics — Elektroakustik — Electroacoustique | | | |
| The pressure and field calibration of microphones, A. J. KING and C. R. MAGUIRE | 1, 123 | | |
| | | | |

| | |
|--|--------|
| Neuer Schallraum der Technischen Hochschule Karlsruhe, H. EBEL und P. MAURER | AB 253 |
| 4. Building acoustics — Bauakustik — Acoustique des bâtiments | |
| A tentative method for the measurement of indirect sound transmission in buildings, E. MEYER, P. H. PARKIN, H. OBERST and H. J. PURKIS | 1, 17 |
| Problèmes de rayonnement en acoustique du bâtiment, M. J. BRILLOUIN | 2, 65 |
| Theorie des Klopfschalles bei Decken mit schwimmendem Estrich, L. CREMER | 2, 167 |
| Absorption of structure-borne sound in building materials without and with sand-filled cavities, W. KUHL and H. KAISER | 2, 179 |
| The mechanism of sound transmission through single leaf partitions, investigated using small scale models, A. SCHOCH and K. FEHÉR | 2, 189 |
| Indirect sound transmission with joist and solid floors, H. J. PURKIS and P. H. PARKIN | 2, 237 |
| Bauakustische Vergleichsmessungen, G. BECKER, G. BOBBERT und H. BRANDT | AB 176 |
| 5. Noise and noise abatement — Geräusche und Geräuschbekämpfung — La lutte contre le bruit | |
| Schalldämmung durch Gummi- und Stahlfedern, M. L. EXNER | 2, 213 |
| Über die Dämpfung der Biegeschwingungen dünner Bleche durch fest haftende Beläge, H. OBERST und K. FRANKENFELD | AB 181 |
| 6. Subjective acoustics—Subjektive Akustik—Acoustique subjective | |
| Über den Einfluß eines Einfachechos auf die Hör-samkeit von Sprache, H. HAAS | 1, 49 |
| Über die ungelösten Probleme in der Theorie der Tonempfindungen, L. CREMER | 1, 83 |
| The subjective calibration of bone-conduction receivers for hearing aids, E. W. AYERS and J. Y. MORTON | 1, 109 |
| Design and analysis of subjective acoustical experiments which involve a quantal response, D. L. RICHARDS | 2, 83 |
| Le problème de la normalisation des appareils de prothèse auditive et des méthodes de mesure, P. CHAVASSE et R. LEHMANN | 2, 119 |
| Über Ultraschallabbildungen am menschlichen Schädel, W. GÜTTNER, G. FIEDLER und J. PÄTZOLD | 2, 148 |
| Reliefdarstellung von Zeit-Frequenz-Spektren, W. MEYER-EPPLER | AB 1 |
| Tonhöhenschreiber für phonetische Untersuchungen, W. KALLENBACH | AB 37 |
| Diagnostische Geräuschverdeckungsmessung, F. J. MEISTER | AB 49 |
| Aufnahme und Analyse von Insektenlauten, W. LOTTERMOSER | AB 66 |
| Hörbarkeit nichtlinearer Verzerrungen, R. FELDT-KELLER | AB 117 |
| 7. Musical acoustics—Musikalische Akustik—Acoustique musicale | |
| Les gammes et le tempérament égal, A. D. FOKKER | 1, 29 |
| The system of the Hemony-carillons tuning, A. LEHR | 1, 101 |
| A general bell-formula, A. LEHR | 2, 35 |
| Mesure des intervalles harmoniques de la gamme à partir de la sensation subjective de consonance, M. BARKECHLI | 2, 242 |
| Definitionen zur Glockenprüfung, E. THIENHAUS | AB 251 |
| 8. Standards of measurements—Akustische Meßtechnik, Normung — Mesures standards | |
| Symbols and nomenclature in sound insulation, C. W. KOSTEN a.o. | 1, 78 |
| Die Schwingung der Luftteilchen in der Nähe einer schallabsorbierenden Wand, E. MEYER und R.W. KARMANN | 1, 130 |
| Les bruits de fond dans les amplificateurs, B. BLADIER | 2, 23 |
| Reliefdarstellung von Zeit-Frequenz-Spektren, W. MEYER-EPPLER | AB 1 |
| Meßrahmen mit vielen Rayleighscheiben, L. KEIDEL | AB 34 |
| Messungen an Bariumtitatanat, H. SCHMIDT | AB 83 |
| Schluckgrad-Vergleichsmessungen, A. EISENBERG | AB 108 |
| Schallschluckend ausgekleidetes Wasserschallmeßbecken, W. KUHL | AB 140 |
| Schallschnellemessungen in Flüssigkeiten, A. KÖSTERS | AB 171 |
| Bauakustische Vergleichsmessungen, G. BECKER, G. BOBBERT und H. BRANDT | AB 176 |
| Das Békésy-Audiometer der Technischen Hochschule Stuttgart, W. KAISER | AB 235 |
| Definitionen zur Glockenprüfung, E. THIENHAUS | AB 251 |
| Neuer Schallraum der Technischen Hochschule Karlsruhe, H. EBEL und P. MAURER | AB 253 |

9. Ultrasonics — Ultraschall — Ultrasons

| | |
|--|--------|
| Ultra-sons dans l'air et leurs applications, F. CANAC et V. GAVREAU | 1, 2 |
| Diffraction of light by two ultrasonic waves, R. R. AGGARWAL and S. PARTHASARATHY | 1, 74 |
| Emploi des ondes ultrasonores pour l'étude d'un champ aérodynamique, M. MERLE | 1, 104 |
| Der Schalldurchgang durch Platten, A. SCHOCH | 2, 1 |
| Seitliche Versetzung eines total reflektierten Strahls bei Ultraschallwellen, A. SCHOCH | 2, 18 |
| Intensity expressions for the diffraction of light by an amplitude modulated ultrasonic beam, R. R. AGGARWAL | 2, 20 |
| Beobachtungen an mit Ultraschall erzeugtem Ölspurdel, F. SEIDL | 2, 45 |
| Beiträge zur Ultraschallmeßtechnik in Flüssigkeiten, J. KOPPELMANN | 2, 92 |
| Linearmagnetostriktive Ultraschallerzeugung mittels magnetischen Kreuzfeldes, H. H. RUST und E. BAILITIS | 2, 132 |
| Über Ultraschallabbildungen am menschlichen Schädel, W. GÜTTNER, G. FIEDLER und J. PATZOLD | 2, 148 |
| Aspects of the concentration of ultrasonic energy, A. BARONE | 2, 221 |
| Temperaturabhängigkeit der Schallgeschwindigkeit, P. P. HEUSINGER | AB 3 |
| Ultraschallabsorption in tierischen Geweben und Kunststoffen, R. ESCHE | AB 71 |
| Schwingungskavitation in Flüssigkeiten, TH. LANGE | AB 75 |
| Linearmagnetostriktive Ultraschallerzeugung, H. H. RUST und E. BAILITIS | AB 89 |
| Untersuchung der Schwingungskavitation in Flüssigkeiten, R. ESCHE | AB 208 |

10. Underwater acoustics — Wasserschall — Acoustique des fluides

| | |
|---|--------|
| The production of liquid vortex tones, and some associated phenomena, F. L. HOPWOOD | 2, 39 |
| Thermische Dämpfung von Blasen, H. LAUER | AB 12 |
| Dämpfung pulsierender Luftblasen, M. L. EXNER AB | 25 |
| Schwingungskavitation in Flüssigkeiten, TH. LANGE | AB 75 |
| Breitbandabsorber für Flüssigkeitsschall, E. MEYER und K. Tamm | AB 91 |
| Schallschluckend ausgekleidetes Wasserschallmeßbecken, W. KUHL | AB 140 |
| Resonanzabsorber für Wasserschall, E. MEYER und H. OBERST | AB 149 |
| Schallschnellemessungen in Flüssigkeiten, A. KÖSTERS | AB 171 |
| Untersuchung der Schwingungskavitation in Flüssigkeiten, R. ESCHE | AB 208 |

11. Miscellaneous — Allgemeines — Diverses

| | |
|--|-------|
| About the history, organization and aims of ACUSTICA, C. W. KOSTEN | 1, 1 |
| Building Research Congress | 1, 16 |

| | |
|---|--------|
| The Physical Society of London — Acoustics Group | 1, 58 |
| International Commission on Acoustics, C. W. KOSTEN | 1, 80 |
| Internationale Raumakustische Tagung in Göttingen, M. EXNER | 1, 99 |
| Buchbesprechung F. A. Fischer „Grundzüge der Elektroakustik“ (E. MEYER) | 1, 100 |
| Report on the first meeting of the International Commission on Acoustics | 1, 143 |
| Tagung des Verbandes Deutscher Physikalischer Gesellschaften vom 19. bis zum 23. 9. 1951 in Karlsruhe, K. Tamm | 1, 143 |
| Bookreview L. E. Kinsler and A. R. Frey "Fundamentals of Acoustics" (C. W. KOSTEN) | 1, 144 |
| Buchbesprechung W. Meyer-Eppler „Elektrische Klangerzeugung“ (K. Tamm) | 1, 144 |
| A new acoustical periodical, E. G. RICHARDSON | 2, 48 |
| Acoustics in Africa, E. G. RICHARDSON | 2, 48 |
| Symposium on acoustics and chemistry in U. S. A. | 2, 48 |
| Buchbesprechung H. Simbringer und A. Zehelein „Handbuch der musikalischen Akustik“ (E. G. RICHARDSON) | 2, 48 |
| International Congress on Electro-acoustics and International Symposium on the Sound Insulation of Light-weight Structures 15—21 June 1953, Netherlands | 2, 96 |
| Cinquième Congrès International d'Oto-Rhino-Laryngo-Broncho-Oesophagologie 8—15 Juin, 1953, Amsterdam | 2, 96 |
| Atti del Convegno Internazionale di Ultracustica, E. G. RICHARDSON | 2, 139 |
| Ultrasuoni in Medicina, E. G. RICHARDSON | 2, 140 |
| International meeting on the propagation of ultrasonics in gases and liquids (Bruxelles 7—9 June 1951), A. GIACOMINI | 2, 140 |
| Letter to the editor, W. K. WESTMIJZE | 2, 292 |
| Einführung zu den Beiheften, M. GRÜTZMACHER und E. MEYER | AB 1 |
| Fachgruppe Akustik im Verband der Deutschen Physikalischen Gesellschaften | AB 107 |
| Tonmeistertagung in Detmold vom 3.—5. Oktober 1951, L. JUNG | AB 116 |
| Arbeitstagung deutscher Audiologen in Erlangen am 19. und 20. Oktober 1951, MEYER ZUM GOTTESBERGE | AB 174 |
| Briefe an die Schriftleitung, E. J. POST, J. H. JANSSEN | AB 257 |
| Berichtigung zu „Schallschnellemessungen in Flüssigkeiten“ von A. KÖSTERS | AB 258 |
| Nachruf BERGER | AB 259 |
| Deutscher Physikertag, Berlin 1952, M. EXNER AB | 259 |
| Buchbesprechung H. Ebert „Physikalisches Taschenbuch“ (H. SEVERIN) | AB 260 |
| Buchbesprechung L. Bergmann „Schwingende Kristalle und ihre Anwendung in der Hochfrequenz- und Ultraschalltechnik“ (K. Tamm) . . | AB 260 |

AUTHORS INDEX

NAMENVERZEICHNIS

INDEX DES AUTEURS

1 = ACUSTICA 1951; 2 = ACUSTICA 1952; AB = Akustische Beihefte

AGGARWAL, R. R. and PARTHASARATHY, S. — Diffraction of light by two ultrasonic waves 1, 74

-- Intensity expressions for the diffraction of light by an amplitude modulated ultrasonic beam 2, 20

AYERS, E. W. and MORTON, J. Y. — The subjective calibration of bone-conduction receivers for hearing aids 1, 109

BAILITIS, E. siehe: RUST, H. H. und -- 2, 132

-- siehe: RUST, H. H. und -- AB 89

BARKECHLI, M. — Régime sonore d'une salle après l'extinction de la source 1, 59

-- Mesure des intervalles harmoniques de la gamme à partir de la sensation subjective de consonance 2, 242

BARONE, A. — Aspects of the concentration of ultrasonic energy 2, 221

BECKER, G., BOBBERT, G. und BRANDT, H. — Bauakustische Vergleichsmessungen AB 176

BIERL, R. — Zur Frequenzanalyse von beliebigen Schallvorgängen AB 225

BLADIER, B. — Les bruits de fond dans les amplificateurs 2, 23

BOBBERT, G. siehe: BECKER, G., -- und BRANDT, H. AB 176

BOHN, L. siehe: MEYER, E. und -- AB 195

BRANDT, H. siehe: BECKER, G., BOBBERT, G. und -- AB 176

BRILLOUIN, J. — Problèmes de rayonnement en acoustique du bâtiment 2, 65

CANAC, F. et GAVREAU, V. — Ultra-sons dans l'air et leurs applications 1, 2

CHAVASSE, P. et LEHMANN, R. — Le problème de la normalisation des appareils de prothèse auditive et des méthodes de mesure 2, 119

CREMER, L. — Über die ungelösten Probleme in der Theorie der Tonempfindungen 1, 83

-- Theorie des Klopfschalles bei Decken mit schwimmendem Estrich 2, 167

DERBYSHIRE, A. G. see: PARKIN, P. H., SCHOLES, W. E. and -- 2, 97

DIESTEL, H. G. siehe: MEYER, E. und -- 2, 161

EBEL, H. — Das Hören von Amplitudenmodulationen AB 246

-- und MAURER, P. — Neuer Schallraum der Technischen Hochschule Karlsruhe AB 253

ECKART, G. et LIÉNARD, P. — Analogie incomplète des impédances caractéristiques électrique et acoustique et conséquences relatives à l'écho dans les milieux stratifiés continus 2, 157

-- Étude des échos des ondes acoustiques dans le milieu stratifié de la troposphère 2, 256

EIJK, J. van den, see: KOSTEN, C. W. a. o. 1, 78

EISENBERG, A. — Schluckgradvergleichsmessungen AB 108

ESCHE, R. — Ultraschallabsorption in tierischen Geweben AB 71

-- Untersuchungen der Schwingungskavitation in Flüssigkeiten AB 208

EXNER, M. L. — Schalldämmung durch Gummi- und Stahlfedern 2, 213

-- Messung der Dämpfung pulsierender Luftblasen in Wasser AB 25

FEHER, K. see: SCHOCH, A. and -- 2, 189

FELDTKELLER, R. — Hörbarkeit nichtlinearer Verzerrungen AB 117

FERRERO, M. A. and SACERDOTE, G. G. — Parameters of sound propagation in granular absorbent materials 1, 137

FIEDLER, G. siehe: GÜTTNER, W., -- und PÄTZOLD, J. 2, 148

FISCHER, F. A. — Die Abstrahlung von Impulsen durch ebene Kolbenmembranen in starrer Wand 1, 35

-- Die Absorption von akustischen Strahlern und Strahlergruppen AB 7

-- Über den Zusammenhang zwischen Richtcharakteristik und Amplitudenverteilung bei linearen und ebenen Strahlergebnissen . . AB 9

FOKKER, A. D. — Les gammes et le tempérament égal 1, 29

FRANKENFELD, K. siehe: OBERST, H. und -- AB 181

FURRER, W. und LAUBER, A. — Die Diffusion in der Raumakustik 2, 251

GÄSSLER, G. siehe: ZWICKER, E. und -- AB 134

GAVREAU, V. voir: CANAC, F. et -- 1, 2

GUITTARD, J. — Analyse de mouvements vibratoires dans un tuyau sonore 2, 231

GÜTTNER, W., FIEDLER, G. und PÄTZOLD, J. — Über Ultraschallabbildungen am menschlichen Schädel 2, 148

HAAS, H. — Über den Einfluß eines Einfachechos auf die Hörsamkeit von Sprache 1, 49

HEUSINGER, P. P. — Messung der Temperaturabhängigkeit der Schallgeschwindigkeit für leichtes und schweres Wasser, sowie für Wasser-Äthylalkohol-Mischungen AB 3

HOPWOOD, F. L. — The production of liquid vortex tones, and some associated phenomena 2, 39

JANSSEN, J. H. — Brief an die Schriftleitung . AB 257

KAISSER, H. — see: KUHL, W. and -- 2, 179

KAISSER, W. — Das Békésy-Audiometer der Technischen Hochschule Stuttgart AB 235

-- siehe: ZWICKER, E. und -- AB 239

KALLENBACH, W. - Eine Weiterentwicklung des Tonhöhenschreibers mit Anwendungen bei phonetischen Untersuchungen AB 37

KARMANN, R. W. siehe: MEYER, E. und -- 1, 130

KASTELEYN, M. L. see: KOSTEN, C. W. a. o. 1, 78

KEIDEL, L. - Meßrahmen mit vielen Rayleigh-Scheiben in Anordnung einer Kreuzgitterfläche zur Erhöhung der Meßempfindlichkeit AB 34

KEIDEL, W. D. siehe: RANKE, O. F., -- und WESCHKE, H. G. AB 145

KING, A. J. and MAGUIRE, C. R. - The pressure and field calibration of microphones 1, 123

KOPPELMANN, J. - Beiträge zur Ultraschallmeßtechnik in Flüssigkeiten 2, 92

KOSTEN, C. W., EIJK, J. van den, KASTELEYN, M. L., OS, G. J. van, and LANGE, P. A. de - Symbols and nomenclature in sound insulation 1, 78

-- see: SMITS, J. M. A. and -- 1, 114

KÖSTERS, A. - Schallschnellemessungen in Flüssigkeiten AB 171

KUHL, W. siehe: MEYER, E. und -- 2, 77

-- and KAISER, H. - Absorption of structure-borne sound in building materials without and with sand-filled cavities 2, 179

-- On the directivity of spherical microphones 2, 226

-- Schallschluckend ausgekleidetes Wasserschallmeßbecken AB 140

KURTZE, G., Verbesserung der Auskleidung schallgedämpfter Räume AB 104

LANGE, TH. - Schwingungskavitation in Flüssigkeiten AB 75

LANGE, P. A. de see: KOSTEN, C. W. a. o. 1, 78

LAUBER, A. siehe: FURRER, W. und -- 2, 251

LAUER, H. - Über die thermische Dämpfung von Blasen verschiedener Gase in Wasser AB 12

LEHMANN, R. voir: CHAVASSE, P. et -- 2, 119

LEHR, A. - The system of the Hemony-carillons tuning 1, 101

-- A general bell-formula 2, 35

LENIHAN, J. M. A. - Mersenne and Gassendi 1, 96

-- The velocity of sound in air 2, 205

LIÉNARD, P. voir: ECKART, G. et -- 2, 157

LOTTERMOSEN, W. - Nachhallzeiten in Barockkirchen 2, 109

-- Aufnahme und Analyse von Insektenlauten AB 66

MAGUIRE, C. R. see: KING, A. J. and -- 1, 123

MAURER, P. siehe: EBEL, H. und -- AB 253

MAYO, C. G. - Standing wave patterns in studio acoustics 2, 49

MEISTER, F. J. - Diagnostische Geräuschverdeckungsmessung AB 49

MEIXNER, J. - Allgemeine Theorie der Schallabsorption in Gasen und Flüssigkeiten unter Berücksichtigung der Transporterscheinungen 2, 101

MERLE, M. - Emploi des ondes ultrasonores pour l'étude d'un champ aérodynamique 1, 104

MEYER, E. und BOHN, L. - Schallreflexion an Flächen mit periodischer Struktur AB 195

-- und DIESTEL, H. G. - Hallraumversuche mit gerichteten Sende- und Empfangsanlagen 2, 161

-- und KARMANN, R. W. - Die Schwingung der Luftteilchen in der Nähe einer schallabsorbierenden Wand 1, 130

-- und KUHL, W. - Bemerkungen zur geometrischen Raumakustik 2, 77

-- und OBERST, H. - Resonanzabsorber für Wasserschall AB 149

-- PARKIN, P. H., OBERST, H. and PURKIS, H. J. - A tentative method for the measurement of indirect sound transmission in buildings 1, 17

-- und TAMM, K. - Breitbandabsorber für Flüssigkeitsschall AB 91

MEYER-EPPLER, W. - Die Reliefdarstellung von Zeit-Frequenz-Spektren durch photographische Differentiation AB 1

MILES, J. W. - On acoustic diffraction through an aperture in a plane screen 2, 287

MOKHTAR, M. and YOUSSEF, H. - Observations on edge-tones 2, 135

MORTON J. Y. see: AYERS, E. W. and -- 1, 109

NIELSEN, A. K. - A simplified technique for the pressure calibration of condenser microphones by the reciprocity method 2, 112

OBERST, H. und FRANKENFELD, K. - Über die Dämpfung der Biegeschwingungen dünner Bleche durch fest haftende Beläge AB 181

-- see: MEYER, E., PARKIN, P. H., -- and PURKIS, H. J. 1, 17

-- siehe: MEYER, E. und -- AB 149

OS, G. J. van, see: KOSTEN, C. W. a. o. 1, 78

PARKIN, P. and PURKIS, H. J. - Sound absorption of wood panels for the Royal Festival Hall 1, 81

--, SCHOLES, W. E. and DERBYSHIRE, A. G. - The reverberation times of ten British concert halls 2, 97

-- see: MEYER, E., --, OBERST, H. and PURKIS, H. J. 1, 17

-- see: PURKIS, H. J. and -- 2, 237

PARTHASARATHY, S. see: AGGARWAL, R. R. and -- 1, 74

PÄTZOLD, J. siehe: GÜTTNER, W., FIEDLER, G. und -- 2, 148

POST, E. J. - Brief an die Schriftleitung AB 257

PRITSCHING, I. siehe: TAMM, K. und -- AB 43

PURKIS, H. J. and PARKIN, P. H. - Indirect sound transmission with joist and solid floors 2, 237

-- see: MEYER, E., PARKIN, P. H., OBERST, H. and -- 1, 17

-- see: PARKIN, P. H. and -- 1, 81

RANKE, O. F., KEIDEL, W. D. und WESCHKE, H. G. — Cochleaeffect bei Verschluß des runden Fensters AB 145

RICHARDS, D. L. — Design and analysis of subjective acoustical experiments which involve a quantal response 2, 83

RICHARDSON, E. G. — Behaviour of aerosols in acoustic and turbulent fields 2, 141

RUST, H. H. und BAILITIS, E. — Linearmagnetostriktive Ultraschallerzeugung mittels magnetischen Kreuzfeldes 2, 132

— und BAILITIS, E. — Linearmagnetostriktive Ultraschallerzeugung AB 89

SACERDOTE, G. G. see: FERRERO, M. A. and — 1, 137

SCHMIDT, H. — Messungen an Bariumtitannat . . AB 83

SCHOBER, F. W. — Über die Abhängigkeit der oberen Hörgrenze vom Lebensalter AB 219

SCHOCK, A. — Der Schalldurchgang durch Platten — Seitliche Versetzung eines total reflektierten Strahls bei Ultraschallwellen 2, 1

— and FEHER, K. — The mechanism of sound transmission through single leaf partitions, investigated using small scale models 2, 189

SCHODDER, G. R., SCHRÖDER, F. K. und THIELE, R. — Verbesserung der Hörsamkeit eines Theaters durch eine schallverzögernde Leisesprecheranlage AB 115

SCHOLES, W. E. see: PARKIN, P. H., — and DERBYSHIRE, A. G. 2, 97

SCHRÖDER, F. K. siehe: SCHODDER, G. R., — und THIELE, R. AB 115

SEIDL, F. — Beobachtungen an mit Ultraschall erzeugtem Ölsprudel 2, 45

SEVERIN, H. und STARKE, C. — Beugung an der kreisförmigen Öffnung AB 59

SMITS, J. M. A. and KOSTEN, C. W. — Sound absorption by slit resonators 1, 114

SOMERVILLE, T. und WARD, F. L. — Investigation of sound diffusion in rooms by means of a model 1, 40

STARKE, C. siehe: SEVERIN, H. und — AB 59

STENZEL, H. — Die akustische Strahlung der rechteckigen Kolbenmembran 2, 263

TAMM, K. und PRITSCHING, I. — Frequenzanalyzer mit mechanischem Hochtonfilter . . AB 43

— siehe: MEYER, E. und — AB 91

THIELE, R. siehe: SCHODDER, G. R., SCHRÖDER, F. K. und — AB 115

THIENHAUS, E. — Definitionen zur Glockenprüfung AB 251

VOGEL, TH. — Sur les conditions aux limites de l'équation du son 2, 281

WARD, F. L. see: SOMERVILLE, T. and — 1, 40

WESCHKE, H. G. siehe: RANKE, O. F., KEIDEL, W. D. und — AB 145

WESTMIJZE, W. K. — Letter to the editor 2, 292

YOUSSEF, H. see: MOKHTAR, M. and — 2, 135

ZWICKER, E. — Hörbarkeit von Amplituden und Frequenzmodulationen AB 125

— und GÄSSLER, G. — Untersuchung frequenzmodulierter Töne AB 134

— und KAISER, W. — Der Verlauf der Modulationsschwellen in der Hörläche AB 239